Fingerübungen zu Vorlesungen 1 und 2 Komplexe Zahlen

Jörn Loviscach

Versionstand: 6. April 2009, 18:49

1. Denken Sie sich zwei komplexe Zahlen wie $z_1 = \frac{1}{3} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \pi - 4i$ aus. Bestimmen Sie durch Rechnung (das heißt: arithmetisch) folgende komplexe Zahlen:

   (a) $z_1 + z_2$

   (b) $z_1 - z_2$

   (c) $z_1 \cdot z_2$

   (d) z_1/z_2

   Skizzieren Sie z_1 und z_2 und die Ergebnisse der obigen Rechnungen in der Gaußschen Zahlenebene. Sind die Ergebnisse plausibel? (Parallelogrammregel für Addition und Subtraktion; Längen und Winkel bei Multiplikation und Division) Überprüfen Sie die Ergebnisse auch mit Octave.

2. Denken Sie sich eine komplexe Zahl wie $z = -\frac{2}{5} + \frac{i}{3}$ aus. Bestimmen Sie durch Rechnung (das heißt: arithmetisch) folgende komplexe Zahlen:

   (a) $\overline{z}$

   (b) $z\overline{z}$

   (c) $|z|^2$

   (d) $|z|$

   (e) den Winkel $\arg z$ im Gradmaß und im Bogenmaß

   Skizzieren Sie z in der Gaußschen Zahlenebene. Sind die Ergebnisse der obigen Rechnungen plausibel? Welche weiteren Winkel kann man für die Zahl z angeben? Wie kann man die Zahl z in der Form $r e^{i\phi}$ schreiben? Überprüfen Sie die Ergebnisse auch mit Octave.

3. Denken Sie sich eine komplexe Zahl wie $z = 4 - 3i$ und eine natürliche Zahl wie $n = 5$ aus. Bestimmen Sie z^n sowohl mit Hilfe der Binomischen Formel wie auch mit Hilfe der Polardarstellung. Überprüfen Sie, dass beide Rechnungen zum gleichen Resultat führen. Überprüfen Sie das Ergebnis auch mit Octave.

4. Denken Sie sich eine komplexe Zahl wie $z = -2+5i$ und eine natürliche Zahl wie $n = 3$ aus. Bestimmen Sie alle n-ten Wurzeln der Zahl z in Polardarstellung. Bestimmen Sie jeweils auch Realteil und Imaginärteil. Skizzieren Sie die Zahl z und ihre n-ten Wurzeln in der Gaußschen Zahlenebene. Überprüfen Sie das Ergebnis auf zwei Weisen mit Octave: Berechnen Sie erstens $z^{1/n}$ und berechnen Sie zweitens die n-ten Potenzen der Wurzeln, die Sie gefunden haben.

5. Stellen Sie eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten auf, die keine reelle Lösung hat. Bestimmen Sie die komplexen Lösungen. Überprüfen Sie mit Octave, ob die berechneten Lösungen die Gleichung wirklich lösen. Zusatzaufgabe: Lösen Sie eine quadratische Gleichung mit *komplexwertigen* Koeffizienten wie $(3+4i)z^2+(-2+i)z+3-4i = 0$.