# Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit

## 1. Folgen

Unter einer *Folge* versteht man in der Mathematik eine mit natürlichen Zahlen durchnummerierte (also unendlich lange) Aufzählung mathematischer Objekte. Wir werden im weiteren nur *Folgen reeller Zahlen* betrachten, bei denen die Objekte also Elemente von $\mathbb{R}$ sind.

*Beispiel:*

| Nummer ("Index") $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Folgenglied $a_n$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | ... |

Beachte: Ob der Folgenindex bei 0 oder 1 (oder einer anderen natürlichen Zahl) beginnt, ist grundsätzlich unerheblich.

Da eine Folge aus unendlich vielen Werten besteht, ist es natürlich grundsätzlich unmöglich, sie durch explizite Aufzählung aller Elemente zu definieren. Man muss also immer ein *Bildungsgesetz* (Berechnungsformel) für das allgemeine Folgenglied $a_n$ angeben. Die Stelle "..." im obigen Beispiel ist so zu verstehen, dass man dem Leser zutraut, das Bildungsgesetz aus den angegebenen Werten selbst richtig zu erraten. (Wenn es sich nicht um eine absichtliche Falle handelt, ist ja wohl die Folge der Quadratzahlen gemeint.) Eine korrekte Definition dieser Folge wäre

$$a_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Folgen, bei denen die Berechnungsformel für $a_n$ nur vom Folgenindex $n$ abhängt, heißen *explizit definierte Folgen*. Weitere Beispiele sind etwa

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{oder} \quad a_n = (-1)^n \quad \text{oder} \quad a_n = (1+\frac{1}{n})^n \qquad \text{(jeweils für } n \in \mathbb{N}^+\text{)}.$$

Dagegen spricht man von *rekursiv definierten Folgen*, wenn im Bildungsgesetz außer $n$ auch noch Vorgänger-Elemente auftreten (d. h. Folgenglieder mit kleineren Indizes), z. B.:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

oder die (vielleicht bekannte) Fibonacci-Folge:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Typisch für rekursive Folgen ist die Notwendigkeit, hinreichend viele "Startwerte" vorzugeben. Außerdem sind solche Folgen i. a. wesentlich schwieriger behandelbar als explizite Folgen.

*Grundlegende Definitionen:*
Im folgenden sei $a_n$ eine Folge mit $n \in \mathbb{N}^+$.

(1) $a_n$ heißt "*monoton wachsend*" (auch: "*monoton steigend*")
$$:\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$
(2) $a_n$ heißt "*monoton fallend*"
$$:\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$
(3) $a_n$ heißt "*nach oben beschränkt*", wenn es eine Schranke $S \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$a_n \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

(4) $a_n$ heißt "*nach unten beschränkt*", wenn es eine Schranke $S \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a_n \geq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

(5) $a_n$ heißt "*beschränkt*", wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d. h. wenn es eine Schranke $S \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|a_n| \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

Beispiele: Man überlege sich die Monotonie- und Beschränktheits-Eigenschaften der Folgen

$$a_n = n^2, \qquad a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = (-1)^n.$$

## 2. Grenzwerte von Folgen

Die Werte der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ nähern sich offenbar mit wachsendem $n$ immer stärker der Null, auch wenn sie diesen Wert nie erreichen. Man sagt

"$a_n$ konvergiert gegen 0" oder "der Grenzwert der Folge $a_n$ ist 0".

Übliche Schreibweisen dafür sind

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim a_n = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_n \to 0.$$

[Das Symbol *lim* kommt von "Limes" (= Grenzwert) und wird auch als "Limes" gesprochen, engl. *limit*.]

Für das konkrete Arbeiten mit Grenzwerten braucht man natürlich eine präzise Definition des Konvergenzbegriffs. Diese lautet wie folgt:

> Die Folge $a_n$ konvergiert gegen den Wert $a \in \mathbb{R}$, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N$ finden lässt, so dass gilt
>
> $$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Anschaulich bedeutet das, dass man ein Intervall $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ um den Grenzwert legt und verlangt, dass von irgendeiner Stelle an **alle** Folgenglieder innerhalb dieses Intervalls liegen. Und das muss für **beliebig kleine** Werte von $\varepsilon$ funktionieren!

Das Gegenteil von Konvergenz ist *Divergenz*. Jede nicht konvergente Folge ist also divergent. Ein wichtiger Sonderfall ist die sogenannte "*bestimmte Divergenz*" gegen Unendlich:

> Die Schreibweise $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ (oder $a_n \to \infty$) bedeutet, dass sich zu jeder (beliebig großen) Schranke $M > 0$ ein Index $N$ finden lässt, so dass für alle Folgenglieder mit $n > N$ gilt: $a_n > M$.

(Analog definiert man $a_n \to -\infty$.)

*Beispiele:*

(1) Für $a_n = n^2$ gilt offenbar $a_n \to \infty$.

(2) Für $a_n = \frac{1}{n}$ gilt $a_n \to 0$. Falls man aber in dieser Folge z. B. jedes millionste Folgenglied durch den Wert 1 ersetzt, geht die Konvergenz bereits verloren! (Die "Ausreißer" sind zwar selten, treten aber immer wieder auf, was laut Definition nicht zulässig ist.)

(3) Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist nicht konvergent, obwohl sie nur zwei verschiedene Werte annimmt.

(4) Konstante Folgen, d. h. Folgen, die von irgendeiner Stelle an immer denselben Wert annehmen, sind konvergent:

$$0,1,2,3,3,3,3,3,3, \ldots \to 3$$

(5) Folgen, die nicht beschränkt sind, können nie konvergent sein. (Das bedeutet aber noch nicht, dass sie im obigen Sinne "bestimmt divergent" gegen $\pm\infty$ sind.)

Für die praktische Überprüfung einer Folge auf Konvergenz oder Divergenz ist die angegebene Definition oft nicht sehr gut geeignet. Zum einen muss der (vermutliche) Grenzwert bereits vorab bekannt sein, zum anderen kann die Rechnerei mit Beträgen und Ungleichungen sehr lästig werden. Wenn es irgend geht benutzt man daher lieber allgemeine *Konvergenzkriterien*, von denen wir nur eines anführen:

| Aus Monotonie und Beschränktheit folgt Konvergenz. |
|---|

Genauer sind das zwei Kriterien:
- Eine *monoton wachsende* und *nach oben beschränkte* Folge ist konvergent.
- Eine *monoton fallende* und *nach unten beschränkte* Folge ist konvergent

Beispiel: Die Folge $a_n = \frac{2^n}{n!}$ ist offensichtlich nach unten beschränkt, da alle Folgenglieder $\geq 0$ sind. Außerdem gilt

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{2}{(n+1)} = a_n \cdot \frac{2}{(n+1)} \leq a_n,$$

die Folge ist also monoton fallend und damit konvergent.

Wir kennen bisher kein Verfahren, um den Grenzwert einer vorgegebenen Folge praktisch zu ermitteln. Selbst wenn die Konvergenz (wie im obigen Beispiel) bereits gesichert ist, müsste man den Grenzwert zunächst "raten" und dann die Ungleichung aus der Definition nachrechnen. Ersteres geht oftmals noch ganz gut (im obigen Beispiel ist $\lim a_n = 0$ ziemlich naheliegend), das Nachrechnen der Definition ist dann aber meistens ziemlich mühsam. (Im obigen Beispiel geht es noch vergleichsweise einfach $\Rightarrow$ hübsche Übungsaufgabe!)

In der Praxis versucht man daher nach Möglichkeit, das Zurückgehen auf die Definition zu vermeiden und unbekannte Folgen lieber auf bekannte (einfachere) Folgen zurückzuführen. Dazu dienen die nachfogend zusammengestellten Formeln.

*Rechenregeln für reelle Zahlenfolgen:*

(1) Sind $a_n$ und $b_n$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten $a$ bzw. $b$, so gilt
$\lim(a_n + b_n) = a + b$ $\lim(a_n - b_n) = a - b$
$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\lim(a_n / b_n) = a / b$ (falls alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$)
$\lim((a_n)^{b_n}) = a^b$ (falls alle $a_n > 0$ und $a > 0$)

(2) Ist $a_n$ eine Nullfolge (d. h. $\lim a_n = 0$) und $b_n$ beschränkt, so ist $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

(3) Ist $a_n$ beschränkt und $\lim b_n = \infty$, so ist $\lim(a_n / b_n) = 0$.

(4) Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, so gilt auch $(a_n + b_n) \to \infty$ und $(a_n \cdot b_n) \to \infty$.
Dagegen ist für $(a_n - b_n)$ und $(a_n / b_n)$ in diesem Fall keine Aussage möglich.

Bemerkungen:

- Die Regeln unter (1) besagen, dass die Grenzwertbildung mit den vier Grundrechenarten und den Potenzoperationen "verträglich" (d. h. vertauschbar) ist.
- Die letzte der fünf Regeln unter (1) gilt insbesondere auch dann, wenn $b_n$ eine konstante Folge ist, d. h. es ist $\lim(a_n{}^c) = a^c$ (falls alle $a_n > 0$ und $a > 0$). Da $c$ dabei auch gebrochen sein darf, beinhaltet das auch alle Regeln über Wurzeln, etwa $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.
- Man beachte, dass die in (2) und (3) lediglich als beschränkt vorausgesetzten Folgen in der Tat nicht konvergent zu sein brauchen.
- Die Formulierung "keine Aussage möglich" unter (4) bedeutet, dass die genannten Folgen im konkreten Einzelfall sowohl konvergent als auch divergent sein können und dass im Konvergenzfall beliebige Grenzwerte auftreten können. (Dasselbe gilt übrigens auch für den Quotienten zweier Nullfolgen.)

Beispiel: Bei der Folge $a_n = \dfrac{n^2+3n}{2n^2-7}$ gehen Zähler und Nenner gegen $\infty$, so dass zunächst keine Aussage möglich ist. Man kann sich aber leicht helfen, indem man den ganzen Bruch mit $\dfrac{1}{n^2}$ erweitert:

$$a_n = \frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{7}{n^2}}$$

Da $\dfrac{3}{n}$ und $\dfrac{7}{n^2}$ Nullfolgen sind, konvergiert der Zähler gegen 1 und der Nenner gegen 2, d. h. $\lim a_n = 0,5$.

<u>Bemerkung zu rekursiven Folgen:</u>
Wie bereits erwähnt, sind rekursive Folgen i. a. wesentlich schwieriger zu behandeln als explizite. Man kann versuchen die Rekursion zu "knacken", d. h. die rekursive Berechnungsformel in eine explizite zu verwandeln, was aber nur in Ausnahmefällen gelingt. Andererseits kann man der Rekursionsformel manchmal sehr leicht ansehen, welche Grenzwerte allenfalls in Frage kommen. Wenn man bei der ganz zu Anfang erwähnten Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

Konvergenz annimmt und auf beiden Seiten der Gleichung den Grenzübergang $n \to \infty$ vollzieht, so erhält man für den (postulierten) Grenzwert die Bedingung

$$a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2.$$

Als Grenzwerte kommen also nur $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ in Frage. Dass die Folge tatsächlich konvergiert, und zwar gegen $\sqrt{2}$, bedarf dann allerdings noch eines separaten Beweises!

## 3. Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das Verhalten der Funktion bei Annäherung an einen Punkt $x_o \in D$. Genauer heißt das, dass wir das Argument $x$ "irgendwie" gegen $x_o$ laufen lassen. Wenn die zugehörigen Funktionswerte dabei ebenfalls auf einen eindeutigen Wert $\eta_o$ zusteuern, nennt man dies den "Grenzwert von $f$ bei Annäherung an $x_o$", geschrieben

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \eta_o.$$

Die genaue Definition lautet:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \eta_o$$

$:\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D,\ x \neq x_o$ gilt: $|x - x_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \eta_o| < \varepsilon.$

(Im Klartext heißt das, dass man die Funktionswerte in ein beliebig kleines Intervall um $\eta_o$ einfangen kann, wenn man mit $x$ nahe genug bei $x_o$ bleibt.)

Etwas anschaulicher ist die Formulierung, dass für **jede** Folge, die im Definitionsbereich verläuft und die gegen $x_o$ konvergiert, die Folge der Funktionswerte gegen $\eta_o$ konvergieren muss.

Anmerkung: Die Voraussetzung $x_o \in D$ ist nicht unbedingt erforderlich. Es reicht, wenn $x_o$ "erreichbar" ist, d. h. als Grenzwert einer ganz in $D$ verlaufenden Folge auftritt. Ist $D$ etwa ein offenes Intervall, so ist es sinnvoll, nach den Grenzwerten von $f$ in den beiden Endpunkten zu fragen ("Fortsetzung von $f$ auf den Abschluss von $D$").

Wir kommen nun zu dem für die gesamte Analysis grundlegenden Begriff der *Stetigkeit* einer Funktion:

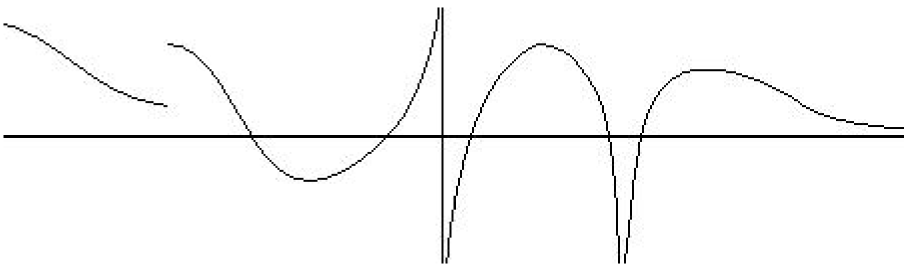
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ heißt "stetig im Punkt $x_o \in D$", wenn der Grenzwert von $f$ in $x_o$ existiert und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

Die Funktion heißt "stetig", wenn sie in **allen** Punkten von $D$ stetig ist.

Wir werden es in Zukunft fast ausschließlich mit Funktionen zu tun haben, die entweder im gesamten Definitionsbereich stetig sind (Polynomfunktionen, Exponentialfunktion, Sinus- und Cosinus-Funktion etc.), oder bei denen die Stetigkeit nur in isolierten Punkten verletzt ist (gebrochen rationale Funktionen, Tangens-Funktion etc.).

Die wichtigsten Beispiele für isolierte Unstetigkeitsstellen sind *Sprungstellen* und *Polstellen* (mit oder ohne Zeichenwechsel):



Ein etwas exotischeres Beispiel, das sich auch kaum noch zeichnen lässt, ist dagegen die Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, die bei $x = 0$ einen sogenannten *Oszillationspunkt* hat. (Aufgabe: Man versuche sich klarzumachen, was da genau passiert!)