Hausaufgaben - Blatt 11

1) Es sei $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_o$ ein Polynom vom Grad k und $q(n) = b_j n^j + \cdots + b_o$ ein Polynom vom Grad j. Begründe, dass im Falle $j > k$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Was lässt sich im Fall $k = j$ aussagen?

2) Untersuche auf Konvergenz und ermittle ggf. den Grenzwert:.

(a) $a_n = \dfrac{6 + 5 \cdot 2^n}{3 + 2 \cdot 2^n}$

(b) $a_n = \dfrac{5 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{2 \cdot 10^{2n-1} + 7 \cdot 10^{n-1}}$

(c) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

(d) $a_1 = 1, \quad a_n = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2} a_{n-1} \quad$ (für $n \geq 2$)

Hinweise: (a) und (b) sollten kein Problem sein, bei (c) braucht man eine gute Idee und (d) lässt sich mit etwas Mühe explizit machen.

3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1, 2\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{(x^2 - 1)(x - 2)}.$$

Kann man nachträglich $f(1)$, $f(-1)$ oder $f(2)$ so definieren, dass die Funktion in diesen Punkten dann auch stetig ist?