

Mathematik für Informatiker

Mathematik 2

Hartmut Scholz, Jörn Loviscach
12. April 2006

Maximale Punktzahl: 17 plus 8, Mindestpunktzahl: 10 inklusive dem zweiten Teil (ggf. aus der ersten Matheklausur)

Dauer: 80 Minuten plus 30 Minuten

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten plus eine Seite, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname
Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + 2x - y^3$. 2 P.
Berechnen Sie den Funktionswert und den Gradienten im Punkt $(2, 1)$.
Geben Sie zwei erzeugende Vektoren für die Tangentialebene in diesem Punkt an, und geben Sie den zugehörigen Normalenvektor an. Wie lautet die Ebenengleichung in der Form $ax + by + cz = d$?

2. Bestimmen Sie die relativen Extremwerte der Funktion 2 P.

$$f(x, y) := x^4 - 2x^2 + y^2 + 3.$$

3. Berechnen Sie das Volumen des in Abb. 1 skizzierten „Zylinderkeils“, 3 P.
der aus dem senkrechten Kreiszyylinder $x^2 + y^2 \leq 4$ durch die beiden Ebenen $z = -\frac{x}{2} + 1$ und $z = \frac{x}{2} + 3$ herausgeschnitten wird.

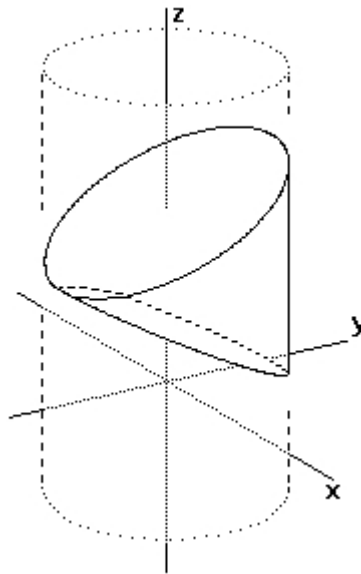


Abbildung 1: Zylinderkeil

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung 3 P.

$$y'' - 4y' + 5y = 5x^2 + 2x + 1.$$

5. Sie führen eine Mailingliste, um wöchentlich Infos an Kunden zu versenden. Jede Woche melden sich 100 neue Benutzer an. Von jeder wöchentlichen Sendung kommen 0,1 Prozent der Mails als unzustellbar zurück. Die entsprechenden Adressen streichen Sie sofort aus der Liste. 4 P.

- (a) Formulieren Sie dies als Differentialgleichung für die Funktion $y(t)$, die die Zahl der Adresseinträge als Funktion der Zeit t (in Wochen) beschreibt. (Der Einfachheit halber sind hier auch Bruchteile vom Benutzern zulässig.)
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$.

6. Gegeben ist die Funktion 3 P.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$$

beidseitig periodisch fortgesetzt mit der Periode 2π .

- (a) Skizzieren Sie die Funktion für ein Periodenintervall.
- (b) Welche Fourierkoeffizienten müssen aus Symmetriegründen gleich null sein?
- (c) Geben Sie die Fourierkoeffizienten a_ν und b_ν für $\nu = 1, 2, 3$ an.

7. Gibt es einen oder mehrere Parameterwerte t , an denen die Kurve $\vec{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} (t+1)^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

mit 45° aufwärts verläuft? Wenn ja, welche t ?

8. Eine Kurve $\vec{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ soll im Punkt $(-1, 0)$ beginnen, durch den Punkt $(0, 2)$ laufen und im Punkt $(1, 0)$ enden. Geben Sie eine mögliche Formel (Rechenvorschrift) für \vec{p} an. 2 P.
9. Sie warten auf eine Lieferung. Bekannt ist, dass der Händler Lieferungen nach einem Tag oder zwei Tagen verschickt, mit einer Wahrscheinlichkeit von $3/4$ bzw. $1/4$. Der Paketdienst braucht dann noch einmal ein, zwei oder drei Tage, bis die Lieferung bei Ihnen ankommt; die Wahrscheinlichkeiten dafür sind $1/2$, $1/3$ und $1/6$. Die Lieferzeit ist die Summe der Anteile von Händler und Paketdienst. Bestimmen Sie die Verteilung (d. h. die möglichen Werte und deren Wahrscheinlichkeiten) der Lieferzeit. 2 P.
10. Die Erzeugnisse einer Firma sind zu 1 % defekt, wenn sie aus der Fertigung kommen. Deshalb entschließt man sich, einen Schnelltest als Qualitätskontrolle einzuführen. Bei diesem Schnelltest wird ein defektes Erzeugnis mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 als defekt eingestuft, aber einige fehlerfreie Erzeugnisse werden ebenfalls als defekt eingestuft – mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1. Wenn ein Erzeugnis den Schnelltest besteht: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es dann fehlerfrei? 2 P.