Mathematik für Informatiker
Mathematik 2

Hartmut Scholz, Jörn Loviscach
27. Februar 2006

Maximale Punktzahl: 17 plus 8, Mindestpunktzahl: 10 inklusive dem zweiten Teil (ggf. aus der ersten Matheklausur)
Dauer: 80 Minuten plus 30 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten plus eine Seite, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := (x + y^2)e^z$. Berechnen Sie den Funktionswert und den Gradienten im Punkt $(1, -1, 0)$. Ermitteln Sie daraus einen Näherungswert für $f(0.9, -1.1, 0.1)$. — 2 P.

2. Bestimmen Sie die relativen Extremwerte der Funktion — 3 P.

$$f(x, y) := x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 4.$$

3. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) := \cos(x + y)$ über den Bereich B, der von den drei Geraden $x = 0$, $y = \pi$ und $x = y$ begrenzt wird. Skizzieren Sie B. — 3 P.

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung — 2 P.

$$y' + y = e^x$$

und die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 1$.

5. Für die Auflösung eines Salzes in Wasser gilt (bei geeigneten Rahmenbedingungen), dass die Zunahme der Konzentration annähernd proportional ist zur Differenz zwischen der aktuellen Konzentration und der Sättigungskonzentration. Benutzt wird ein Salz mit einer Sättigungskonzentration von 300 Gramm pro Liter. 4 P.

   (a) Formulieren Sie dies als Differentialgleichung für die Funktion $y(t)$, die die Konzentration y (in Gramm pro Liter) als Funktion der Zeit t (in Minuten) beschreibt. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$.

   (b) Eine hinreichend große Menge des Salzes werde zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Wasser übergossen. Nach 10 Minuten wird eine Probe aus dem Wasser entnommen. Sie weist einen Salzgehalt von 100 Gramm pro Liter auf. Welcher Wert für die Proportionalitätskonstante ergibt sich daraus?

6. Gegeben ist die Funktion 3 P.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x < -\frac{\pi}{3}, \\ 1 & \text{für } -\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{3} \le x < \pi, \end{cases}$$

   beidseitig periodisch fortgesetzt mit der Periode 2π.

   (a) Skizzieren Sie die Funktion für ein Periodeninterval.

   (b) Begründen Sie (ohne Rechnung), dass alle Fourierkoeffizienten b_ν gleich null sein müssen.

   (c) Bestimmen Sie den Fourierkoeffizienten a_0 elementar-geometrisch (ohne Integration).

   (d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_ν für $\nu = 1, 2, 3$.

7. Geben Sie an, an welchen Punkten (x, y) die Gerade $y = 2x$ die Kurve schneidet, die definiert ist durch $\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit — 2 P.

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

8. Eine Kurve $\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ soll durch den Ursprung laufen und durch den Punkt $(1, 1)$ laufen und an diesem Punkt eine Tangente parallel zur x-Achse besitzen. Geben Sie eine mögliche Formel (Rechenvorschrift) für $\vec{p}$ an. — 2 P.

9. Gegeben seien ein idealer Würfel und ein kaputter Würfel. Letzterer habe $P(\{1\}) = 0.5$ und $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 0.1$. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der erste Würfel eine 1 zeigt, wenn die Summe beider Augenzahlen gleich 3 ist? — 2 P.

10. Bei einer bestimmten Netzwerkverbindung kommen von 1000 Datenpaketen im Schnitt nur 995 korrekt beim Empfänger an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sendung von 1000 Datenpaketen ohne Fehler ankommt? (Ergebnis genügt als per Taschenrechner auswertbare Formel) — 2 P.