Mathematik für Informatiker
Klausur Mathematik 1

Jörn Loviscach
24. November 2005

Diplom Medieninformatik: Aufgaben 1 bis 14 bilden die erste Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 33, Mindestpunktzahl: 11), Die Aufgaben ab 15 sind Teil der zweiten Mathematikprüfung.

Bachelor Digitale Medien: Alle Aufgaben zusammen bilden die erste und einzige Mathematikprüfung (maximale Punktzahl: 41, Mindestpunktzahl: 14).

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), Plüschtier bis 50 cm, nichtmathematisches Wörterbuch (Chinesisch-Deutsch o. ä.), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Gegeben seien die folgenden zwei Aussagen A und B über eine Zahl $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$: 2 P.

   A Die Zahl n ist kleiner als 13.

   B Die Zahl n ist gerade.

   Gibt es eine Aussage C, die sowohl für A wie für B jeweils hinreichend, aber nicht notwendig ist? Falls ja, geben Sie eine solche Aussage C an. Falls nein: Begründung!

2. Seien $a \neq 3$, $b \neq 1$ und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie $a \cdot \sqrt[x]{b} = 3$ nach x auf. 2 P.

3. Skizzieren Sie grob und soweit ohne Taschenrechner möglich den prin- 2 P.

zipiellen Verlauf des Graphen von $f(x) = (\cos(x+3))^2$ auf dem Intervall $x \in [0, 2\pi]$. Markieren Sie die Einheiten von x- und y-Achse.

4. Wie viele verschiedene Wörter kann man bilden, indem man die Buchstaben des Worts ANORDNUNG umstellt? Beispiele: NANODURNG, DNNROGUNA. (gefundene Formel nicht ausrechnen) 2 P.

5. Gegeben seien zwei Kreise im $\mathbb{R}^2$: der erste mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2, der zweite mit Mittelpunkt $(4, 0)$ und Radius 1. Ein dritter Kreis liege so, dass er diese beiden anderen Kreise von oben (d. h. von höheren y-Werten her) berührt. Dieser dritte Kreis habe den Radius 2. Was sind die Koordinaten seines Mittelpunkts? (rechnen, nicht aus Skizze ablesen) 2 P.

6. Gegeben sei die Kugel im $\mathbb{R}^3$, die den Mittelpunkt $(1, 2, 3)$ und den Radius 2 hat. Geben Sie die Gleichung einer Gerade an, die die Kugel tangential berührt. (keine eindeutige Lösung) 2 P.

7. Die Gerade $2x + 3y = 0$ im $\mathbb{R}^2$ diene als Achse für eine Spiegelung. Jemand behauptet, diese Spiegelung bilde den Punkt $(-2, -2)$ auf den Punkt $(1, 3)$ ab. Widerlegen Sie das durch ein rechnerisches Argument. 2 P.

8. Gibt es reelle Zahlen a, b, c, so dass die Gleichung 2 P.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

keine *eindeutige* Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ besitzt? Falls ja, geben Sie ein Beispiel für solche a, b, c an. Falls nein: Begründung!

9. Gegeben sei der Vektor $\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zerlegen Sie diesen Vektor in eine Komponente parallel und eine Komponente senkrecht zum Vektor $\vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. 2 P.

10. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die erfüllen: $z^4 + z^2 = 0$. 2 P.

11. Bestimmen Sie für die gebrochenrationale Funktion 6 P.

$$f(x) := \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

alle Nullstellen und Polstellen. Finden Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ lokaler Extrema und klassifizieren Sie diese jeweils als lokale Minima oder

Maxima. Geben Sie die Bereiche an, auf denen die Funktion monoton steigend/fallend und auf denen sie konvex/konkav ist. Existiert eine Asymptotengerade für $x \to \pm\infty$? Falls ja, geben Sie eine Gleichung für diese an. Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

12. Existiert der folgende Grenzwert? Falls ja: Welchen Wert hat er? Falls nein: Begründung! — 2 P.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - \frac{1}{n}}{4^n + \sin(n)}$$

13. Die Normalparabel $y = x^2$ werde „von oben“ bis zur Höhe $y = 4$ gefüllt. Wie groß ist die gefüllte Fläche? — 2 P.

14. Sie werfen einen Ball senkrecht in die Luft und fangen ihn auf seinem Weg zum Erdboden auf gleicher Höhe wieder auf. Der Ball ist vom Loslassen bis zum Fangen zwei Sekunden unterwegs. Wie hoch steigt er über die Anfangshöhe? Was ist seine Anfangsgeschwindigkeit? Was ist seine Endgeschwindigkeit? Rechnen Sie mit einer Schwerebeschleunigung von 10 m/s^2. — 3 P.

15. Von den 1.000.000.000 Sektoren einer Festplatte seien 100 defekt. Auf der Platte befindet sich eine Datei, die sich über 1000 Sektoren erstreckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Datei von mindestens einem Fehler betroffen ist? Annahme: Die defekten Sektoren liegen unabhängig voneinander verstreut auf der Platte. — 2 P.

16. Kann man einen Würfel so manipulieren, dass das Ereignis „gerade Zahl“ und das Ereignis „Zahl ist 2 oder 4“ stochastisch unabhängig voneinander sind? Falls ja: Wie könnte man die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 bis 6 wählen? Falls nein: Begründung! — 2 P.

17. Geben Sie die Gleichung einer parametrisierten Kurve im $\mathbb{R}^2$ an, die am Punkt $(1, 0)$ startet, am Punkt $(0, 1)$ endet und überall die Geschwindigkeit 1 hat. (keine eindeutige Lösung) — 2 P.

18. Wie lang ist die Kurve $\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^3}{12} + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ zwischen $t = 1$ und $t = 4$? — 2 P.