

Mathematik für Informatiker

Mathematik 2

Jörn Loviscach, Hartmut Scholz
24. Februar 2005

Maximale Punktzahl: 20, Mindestpunktzahl: 8

Dauer: 90 Minuten

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname
Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf \mathbb{R}^2 sei eine Funktion f durch $f(x, y) := 4xy - 2x - 2y$ definiert. 2 P.
Skizzieren Sie auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$ die Menge der (x, y) mit $f(x, y) = 0$ und die Menge der (x, y) mit $f(x, y) = -1$.
2. Auf \mathbb{R}^2 sei eine Funktion f durch $f(x, y) := y \sin(x)$ definiert. Besitzt f relative Extrema? Wenn ja, an welchen Punkten (x, y) ? Begründung! 2 P.
3. Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x + y$ über die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe um den Ursprung. 2 P.
4. Für $t \in \mathbb{R}$ sei eine Kurve definiert durch 2 P.

$$\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ t + 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es Kurvenpunkte (x, y) , an denen die Tangentengerade durch den Ursprung verläuft?

5. Eine Funktion f sei für $x \in [-\pi, \pi)$ definiert durch 2 P.

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{falls } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

und auf alle $x \in \mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt. Skizzieren Sie die Funktion. Bestimmen Sie

- entweder: die Fourier-Koeffizienten a_0 und b_3
- oder: den Gleichspannungsanteil der Fourier-Reihe sowie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_3 .

6. Durch die Punkte $(1, 1)$, $(1, 3)$ und $(3, 4)$ soll eine aus zwei Segmenten bestehende Bézier-Kurve gelegt werden. Sie soll in diesen Punkten die Geschwindigkeitsvektoren $(-2, 2)$, $(2, 1)$ beziehungsweise $(2, 2)$ besitzen. Berechnen Sie die Bézier-Koeffizienten und skizzieren Sie die Kurve. 2 P.

7. Es wird 100°C heißes Wasser in eine Tasse gegossen. Diese steht in der 20°C warmen Zimmerluft. Nach drei Minuten kühlt sich das Wasser auf 80°C ab. Wie lange dauert es ab dem Eingießen, bis das Wasser auf 40°C abgekühlt ist? Hinweis: Die Temperatur $y(t)$ des Wassers zur Zeit t ändert sich zu jedem Zeitpunkt um eine Konstante mal die aktuelle Temperaturdifferenz zwischen Wasser und Umgebung. 2 P.

8. Gegeben sei die Differentialgleichung 2 P.

$$y'' - 2y' - 3y = 9x^2 + 1.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

9. In Ihrem E-Mail-Postfach finden Sie 90 Prozent Spam und 10 Prozent erwünschte Mails. Jede zweite Spam-Mail enthält das Wort „cheap“; bei den erwünschten Mails kommt es dagegen nur in jeder hundertsten vor. Wenn Sie nun eine neue Mail erhalten, in der das Wort „cheap“ vorkommt: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Spam? 2 P.
10. Sie fahren jede Woche zehn Mal mit der Straßenbahn. Aus der Vergangenheit wissen Sie, dass Sie im Mittel jedes fünfzigste Mal kontrolliert werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie nächste Woche genau zweimal kontrolliert werden? 2 P.