

blau: angesagte Änderungen

# Mathematik für Informatiker

## Mathematik 1

Jörn Loviscach  
18. Dezember 2002

Maximale Punktzahl: 64, Mindestpunktzahl: 26

Dauer: drei Zeitstunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben), *kein* Taschenrechner, *keine* andere Formelsammlung, *kein* Skript

Nachname	Vorname
Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel:  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  für alle Aussagen  $p$ ,  $q$  und  $r$ . 2 P.
2. Schreiben Sie die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , die  $x^2 < 4$  erfüllen, als Intervall, d. h. einen Ausdruck in der Art von  $[3, 4)$ . 1 P.
3. Geben Sie zwei Intervalle reeller Zahlen an, die Folgendes erfüllen: Ihre Schnittmenge ist gleich  $(2, 3)$  und ihre Vereinigungsmenge ist  $[1, 4]$ . 1 P.
4. Eine komplexe Zahl  $z$  erfülle  $3iz = 2z + i$ , wobei  $i$  die imaginäre Einheit ist. Schreiben Sie  $z$  in der Form  $a + bi$  mit reellen Zahlen  $a$  und  $b$ . 1 P.
5. Seien  $a$ ,  $b$  und  $x$  positive reelle Zahlen. Lösen Sie  $\frac{\sqrt{x^7+a}}{3} = b$  nach  $x$  auf. 1 P.
6. Seien  $a > 1$ ,  $b > 1$  und  $x$  positive reelle Zahlen. Lösen Sie  $a^{x-2}b^x = 3$  nach  $x$  auf. 1 P.

7. Auf der Menge  $\{A, B, C, D, E\}$  sei eine Art Addition wie folgt definiert: 2 P.

‡	A	B	C	D	E
A	B	E	D	A	C
B	E	C	A	B	D
C	D	A	E	C	B
D	A	B	C	D	E
E	C	D	B	E	A

Was sollte dann sinnvollerweise die Differenz  $A - C$  sein? Rechenweg?

8. Ein reelles Polynom habe an der Stelle  $x = 0$  den Wert 3, an der Stelle  $x = 1$  den Wert 2 und an der Stelle  $x = 2$  den Wert 4. Ist das Polynom damit eindeutig festgelegt? Falls ja, begründen Sie das. Falls nein, geben Sie zwei verschiedene Beispiele für solche Polynome mit diesen Eigenschaften an. 2 P.
9. Im  $\mathbb{R}^2$  seien der Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius 3 sowie der Kreis mit Mittelpunkt  $(1, 2)$  und Radius 2 gegeben. Schneiden sich die beiden Kreislinien? Wenn ja: Wo? 3 P.
10. Geben Sie eine Gleichung für ~~die~~ <sup>eine</sup> Gerade im  $\mathbb{R}^2$  an, die den Punkt  $(1, 2)$  enthält, zum Ursprung den Abstand 2 besitzt ~~und oberhalb vom Ursprung verläuft~~. Lösungsweg! 3 P.
11. Im  $\mathbb{R}^3$  sei das Dreieck gegeben, das von den drei Punkten  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  und  $(4, 3, 2)$  aufgespannt wird. Geben Sie zwei verschiedene Vektoren der Länge 1 an, die senkrecht zur Dreiecksfläche verlaufen. 3 P.
12. Ein Viereck im  $\mathbb{R}^3$  habe die Eckpunkte  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, 3, 6)$ ,  $(2, 3, 2)$  und  $(4, 4, 5)$ . Handelt es sich dabei um ein Rechteck? Vollständige Begründung! <sup>Reihenfolge: A B D</sup> <sub>C</sub> 2 P.
13. Füllen Sie die Lücken in der Matrix so aus, dass die Rechnung aufgeht (keine eindeutige Lösung): 1 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14. Eine Drehung des  $\mathbb{R}^2$  um  $+45^\circ$  mit zunächst unbekanntem Mittelpunkt bilde den Punkt  $(3, 1)$  auf den Punkt  $(2, 4)$  ab. Berechnen Sie das Zentrum der Drehung. 2 P.

15. Eine Drehung des  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $(3, 5)$  um einen zunächst unbekanntem Winkel bilde den Punkt  $(1, 2)$  auf den Punkt  $(\underline{4}, 3)$  ab. Bestimmen Sie rechnerisch den Drehungswinkel. 2 P.
16. Berechnen Sie die Determinante  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ . 2 P.
17. Geben Sie zwei Geraden im  $\mathbb{R}^3$  an (z. B. in Punkt-Richtungs-Form), die den Abstand 1 voneinander haben und nicht parallel zueinander sind. (keine eindeutige Lösung) 2 P.
18. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\subset \mathbb{R}^4$  des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.
- $$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 5 \\ x + 4y + 7z + 8u &= 7 \\ 2x + 5y + 7z + 9u &= 12 \\ 2x + 2y + z + 2u &= 4 \end{aligned}$$
19. Geben Sie eine reelle Matrix an, deren Kern die Menge der Vektoren der Art  $\begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  ist. 2 P.
20. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle  $z$  mit  $z^6 = i$ . 2 P.
21. Von einem Dreieck sei bekannt, dass eine Seite die Länge 1 hat und eine andere Seite die Länge 2 hat. Außerdem sei bekannt, dass einer der Winkel  $90^\circ$  beträgt, aber es sei nicht bekannt, welcher das ist. Welche Möglichkeiten bleiben nach diesen Informationen für die Länge der dritten Seite des Dreiecks? 2 P.
22. Für welche  $z \in \mathbb{C}$  ist  $e^z$  gleich einer reellen Zahl? 2 P.
23. Bestimmen Sie alle Lösungen  $x \in \mathbb{C}$  der Gleichung  $2x^2 + 12x + 26 = 0$ . 2 P.
24. Ist die Folge  $\frac{7+4n^2}{\exp(-n)+3n}$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.
25. Geben Sie eine Rechenvorschrift  $f(x)$  für eine reelle gebrochenrationale Funktion  $f$  an, welche bei  $x = 1$  eine Polstelle besitzt, zu beiden Seiten dieser Polstelle gegen  $-\infty$  geht und in der Horizontalen asymptotisch gegen die Gerade  $y = 2x + 1$  strebt. (Lösung nicht eindeutig) 3 P.

26. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(x+4) + \frac{e^{3x}}{1+x^2} \right)$$

27. Eine Funktion  $f$  habe den Definitionsbereich  $[2, 3]$  und sei bestimmt durch  $f(x) := x^3 - 5x^2 + 8x$ . Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

28. Rechnen Sie aus: 2 P.

$$\int_2^3 \left( \frac{1}{(x+1)^2} + \exp(-x) \right) dx$$

29. Finden Sie eine Stammfunktion zur Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die definiert ist durch: 2 P.

$$f(x) := \frac{\cos(x)}{\sqrt{2 - \sin(x)}}$$

30. Berechnen Sie: 3 P.

$$\int_1^3 \frac{x-3}{x^2-4x} dx$$

31. Lösen Sie mittels partieller Integration das Integral vollständig auf (Rechenweg!): 2 P.

$$\int_1^2 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$$

32. Wie groß ist der Fehler, wenn man  $\int_0^4 x^4 dx$  per Simpson-Verfahren mit zwei Doppelstreifen nähert? 2 P.

33. Entwickeln Sie die auf  $x \in \mathbb{R}$  durch  $f(x) := \sin(\sin(x))$  definierte Funktion  $f$  an  $x = 0$  bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.