Mathematik für Informatiker
Klausur: Mathematik 1

Jörn Loviscach
10. April 2002

Maximale Punktzahl: 36, Mindestpunktzahl: 12
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben),
kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Sei z eine komplexe Zahl. Ist $z^{42} = 0$ für $z = 0$ hinreichend oder notwendig oder beides oder keines von beiden? 1 P.

2. Schreiben Sie das Intervall $(1, 2]$ als Differenzmenge zweier Intervalle. (Lösung nicht eindeutig) 1 P.

3. Geben Sie eine komplexe Zahl z an, für die gilt: $(1+2i)z = 4$. Schreiben Sie z in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a und b. 1 P.

4. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie nach x auf: $\sqrt[a]{b/2^x} = 3$. 1 P.

5. Schreiben Sie das reelle Polynom $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ vollständig in (ggf. komplexe) Linearfaktoren zerlegt. Hinweis: p hat die Eigenschaft $p(2) = 0$. 2 P.

6. Zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich senkrecht im Punkt $(2, 3)$. Die erste Gerade enthält außerdem den Punkt $(4, 7)$. Geben Sie eine Gleichung für die zweite Gerade an. 2 P.

7. Eine Punktspiegelung des $\mathbb{R}^2$ mit zunächst unbekanntem Zentrum bildet den Punkt $(3,6)$ auf den Punkt $(3,2)$ ab. Bestimmen Sie rechnerisch das Zentrum der Punktspiegelung. 2 P.

8. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(0,0,1)$, $(0,1,2)$ und $(1,1,2)$. Eine andere Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(1,1,0)$, $(1,2,0)$ und $(1,1,2)$. Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittmenge dieser beiden Ebenen. 3 P.

9. Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 2 P.

10. Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene alle z, die $z^4 = i$ erfüllen. 2 P.

11. Ist die Folge $(n^2 - 3n)/(4n^2 + 7\sqrt{n})$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

12. Besitzt die auf $\mathbb{R}$ durch $f(x) = (4x^5 + 3x^4 + 7)/(2x^4 + 3)$ definierte Funktion f für $x \to \pm\infty$ eine Asymptotengerade? Wenn ja, welche? 2 P.

13. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x} + \sin(7x) + \frac{2x^3+1}{1+x^2}\right)$$

14. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[1,2]$ und sei bestimmt durch $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

15. Finden Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\ \cos(x^2 - 9)$. 1 P.

16. Berechnen Sie: 3 P.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 7x + 12}$$

17. Berechnen Sie z. B. per partieller Integration (Rechenweg!): 2 P.

$$\int_1^2 x^2\ \ln(x)\, dx$$

18. Schätzen Sie $\int_{-2}^{2} \exp(-x^2)\, dx$ per Simpson-Verfahren (zwei Doppelstreifen). 2 P.

19. Entwickeln Sie die auf $\mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ definierte Funktion f an $x = 1$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.

20. Bestimmen Sie eine unendliche Reihe, die sich summiert zu: 2 P.

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$