Mathematik 2

Klausur vom 2024-02-09

Musterlösungen

1. Vektoren $\parallel$ Ebene z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Vektor $\perp$ Ebene z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Geradengl. z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{x} \in \text{Kern} \iff \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

   $\cdot 3$

   $\iff \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

   $\iff \underbrace{\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \text{ beliebig}}_{\text{Der Kern ist diese Ebene.}}$

3. ((Zum Beispiel so:))

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{4} = -32.$$

4. $y' = \cos(x) y^2 \iff$ " $\frac{dy}{y^2} = \cos(x)\,dx$ "

Also: $\underbrace{\int_4^{y_1} \frac{dy}{y^2}}_{\left[-\frac{1}{y}\right]_4^{y_1}} = \underbrace{\int_3^{x_1} \cos(x)\,dx}_{\left[\sin(x)\right]_3^{x_1}}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y_1} + \frac{1}{4} = \sin(x_1) - \sin(3)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{\frac{1}{4} - \sin(x_1) + \sin(3)}.$$

5. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$, $f''(x) = \frac{12}{x^5}$

$f(2) = \frac{1}{8}$, $f'(2) = -\frac{3}{16}$, $f''(2) = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{8}{\cancel{32}}}$

Quadratische Näherung:

$$f(1{,}99) \approx \frac{1}{8} - \frac{3}{16} \cdot (-0{,}01) + \frac{3}{8} \frac{(-0{,}01)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{0{,}03 + 0{,}0003}{16}$$

$$= \frac{2{,}0303}{16}.$$

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\cos(\underbrace{3x+y}_{\frac{\pi}{2}}) \cdot 3}_{0}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\underbrace{\cos(3x+y)}_{0} - \underbrace{\sin(y)}_{0}}_{0}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underbrace{-\underbrace{\sin(3x+y)}_{1} \cdot 9}_{-9}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underbrace{-\underbrace{\sin(3x+y)}_{1} - \underbrace{\cos(y)}_{1}}_{-2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underbrace{-\underbrace{\sin(3x+y)}_{1} \cdot 3}_{-3}$

an $(x|y) = (\frac{\pi}{6}|0)$

Also an $(x|y) = (\frac{\pi}{6}|0)$ horizontale Tangentialebene, Hesse-Matrix $= \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

$\det(\cdot/\cdot) = 18 - 9 > 0$

< 0

lok. Maximum,
nicht lok. Minimum

7. Gesuchte Matrix $=$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. • Homogene Form: $y' - 2y \overset{!}{=} 0$.
Allg. Lsg. der homogenen Form: $y(x) = Ae^{2x}$.

• Inhomogene Form: $y' - 2y \overset{!}{=} e^{2x}$.
Ansatz für eine spez. Lsg. davon:
$y(x) = Be^{2x}$. Einsetzen $\Rightarrow 0 \overset{!}{=} e^{2x}$ ↯.
Neuer Ansatz: $y(x) = Bxe^{2x}$.
Einsetzen: $Be^{2x} \underbrace{+ Bx \cdot 2e^{2x} - 2Bxe^{2x}}_{0} \overset{!}{=} e^{2x}$

Wähle $B = 1$!

• Allg. Lsg. der inh. Form: $y(x) = Ae^{2x} + xe^{2x}$

• Anfangsbedingung einbauen:
$3 \overset{!}{=} y(0) = Ae^0 + 0e^0 \Rightarrow A = 3$.

9. Idee: Nehme $e^{\lambda x}$ mit $\underbrace{\lambda = 1 \text{ und } \lambda = 0}$!
$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 0) = \lambda^2 - \lambda + 0$

DGL z.B.: $y'' - y' = 0$.

10. $c_0 = \frac{1}{3} \int_0^1 e^t \, dt = \frac{1}{3} \left[e^t \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.$

$$c_5 = \frac{1}{3} \int_0^1 \underbrace{e^{-2\pi i \cdot 5t/3} \, e^t}_{e^{\left(-2\pi i \cdot \frac{5}{3} + 1\right)t}} \, dt$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{e^{\left(-2\pi i \cdot \frac{5}{3} + 1\right)t}}{-2\pi i \cdot \frac{5}{3} + 1} \right]_0^1$$

$$= \frac{e^{-2\pi i \cdot \frac{5}{3} + 1} - 1}{3 \cdot \left(-2\pi i \cdot \frac{5}{3} + 1\right)} \quad \left(\left(= \frac{e \cdot e^{-\frac{\overset{4}{\cancel{10}}}{3}\pi i} - 1}{-10\pi i + 3} \right)\right)$$

11. $\frac{9}{s^3+s} = \frac{9}{(s^2+1)s} \underset{\uparrow}{=} \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s}$

Partialbruch-Zerlegung

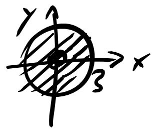
$$= \frac{As^2 + Bs + C(s^2+1)}{(s^2+1)s}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} s^2 & A + C = 0 \\ s^1 & B = 0 \\ s^0 & C = 9 \end{cases} \Longrightarrow A = -9$$

Also $\frac{9}{s^3+s} = \frac{-9}{s^2+1} + \frac{9}{s}$,

also $y(t) = -9\cos(t) + 9$.

12. $$\iint \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$$



$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \ln(1+r^2)\, d\varphi \right) r\,dr$$

$$= \int_0^3 2\pi \ln(1+r^2)\, r\,dr \qquad \begin{cases} u = 1+r^2 \\ \frac{du}{dr} = 2r \\ du = 2r\,dr \end{cases}$$

$$= \int_{1+0^2}^{1+3^2} \cancel{2}\pi \ln(u)\, \frac{du}{\cancel{2}}$$

$$= \pi \left[u \ln(u) - u \right]_1^{10}$$

$$= \pi \cdot \left(10 \ln(10) - 10 - 0 + 1 \right)$$

$$= \pi \cdot \left(10 \ln(10) - 9 \right).$$