Mathematik 2
Klausur vom 2022-07-15
Musterlösungen

1) Flächeninhalt $= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{vmatrix} 6-1 & 2-1 \\ 3-2 & 5-2 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14}$

$= 7$

$\left(\left(\text{oder per Vektorprodukt } \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \right)\right)$

2) λ ist E.W. $\Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)^2$

$\Longleftrightarrow \lambda = 2$

E.V. $\vec{v}$ dazu:

$\begin{pmatrix} 2-2 & 3 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$, z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $y' = y^2 \sin(3x)$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{y^2} = \sin(3x)\,dx$$

$$\underbrace{\int_4^{y_1} \frac{dy}{y^2}} = \underbrace{\int_3^{x_1} \sin(3x)\,dx}$$

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_4^{y_1} \qquad \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_3^{x_1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y_1} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cos(3x_1) + \frac{1}{3}\cos(9)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cos(3x_1) - \frac{1}{3}\cos(9)}$$

4) f ist ungerade $\Rightarrow$ Alle $a_\bullet$ sind 0.

$$b_3 = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}} \int_{-3}^{3} \sin\left(\frac{\cancel{3}^{1}\pi t}{\cancel{3}_{1}}\right) f(t)\,dt = \frac{1}{3}\cdot 2\int_0^3 \sin(\pi t)\cdot 1\,dt$$

wegen Symmetrie!

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^3 = \frac{2}{3\pi}\left(-(-1)-(-1)\right) = \frac{4}{3\pi}$$

5) $$\frac{4s+5}{s^2+9} = 4\,\frac{s}{s^2+9} + \frac{5}{3}\,\frac{3}{s^2+9}$$

$$\xleftarrow{\mathcal{L}} 4\cos(3t) + \frac{5}{3}\sin(3t)$$

6) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \qquad \overset{\text{an }(1|2)}{=} \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \qquad = -\frac{1^2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

Also $\underset{\text{an }(1|2)}{df} = 1 \cdot dx - \frac{1}{4}\,dy$.

Also $$\frac{1{,}01^2}{1{,}98} \approx \underbrace{\frac{1^2}{2} + 1 \cdot 0{,}01 - \frac{1}{4}\cdot(-0{,}02)}_{0{,}515}.$$

7)
$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}}_{\substack{24+0+40 \\ -0-32-32}}$$

$$= 0$$

Der Rang muss also $4-1=3$ oder weniger sein. Der Defekt muss also 1 oder mehr sein.

8) Zum Beispiel: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

((Wichtig sind <u>zwei</u> linear unabhängige Zeilen, weil der Rang gleich $3-1=2$ sein muss.))

9) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\ln(x) \approx \underbrace{\underbrace{\ln(1)}_{0} + \frac{1}{1}\cdot(x-1) - \frac{1}{1^2}\cdot(x-1)^2/2}_{x-1-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

Die Gleichung wird zu $\cancel{x} \overset{!}{\approx} 1{,}2 + \cancel{x} - 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{\cancel{2}} \approx 0{,}\cancel{2}\,4$$

$$\Longleftrightarrow \quad x - 1 \approx \pm \sqrt{0{,}4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \approx 1 \pm \sqrt{0{,}4}\,.$$

10) Ansatz: $y(x) = A e^{3x}$

$$y'(x) = 3A e^{3x}$$

$$y''(x) = 9A e^{3x}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{9Ae^{3x} - 9Ae^{3x}}_{0} \overset{!}{=} e^{3x} \qquad ↯$$

Neuer Ansatz: $y(x) = Axe^{3x}$

$$y'(x) = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$$

$$y''(x) = 2 \cdot 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

$$\Longrightarrow \quad 6Ae^{3x} + \cancel{9Axe^{3x}} - \cancel{9Axe^{3x}} \overset{!}{=} e^{3x}$$

Wähle $A = \frac{1}{6}$.

11) • Homogene Form: $y'' + y' = 0$

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\Longrightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$

$\Longrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1$

Allg. Lsg. der hom. Form:

$y(x) = A \cdot \overset{1}{\cancel{e^{0x}}} + B e^{-x}$

• Eine spez. Lsg. der inh. Form:

Ansatz: $y(x) = cx$ ((nur Ableitungen links in der DSL!))

$\Longrightarrow 0 + c \overset{!}{=} 7$

• Allg. Lsg. der inh. Form:

$y(x) = A + B e^{-x} + 7x$

12) $V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\left(16 - r^4\right) - 0 \right) r \, dr \right) d\varphi$

$= 2\pi \cdot \int_0^2 \left(16r - r^5\right) dr = 2\pi \cdot \left[8r^2 - \frac{r^6}{6} \right]_0^2$

$= 2\pi \cdot \left(32 - \frac{\overset{32}{\cancel{64}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} - 0 \right) = \frac{128}{3} \pi .$