Mathematik 2 für Regenerative Energien

Klausur vom 26. Januar 2022

Jörn Loviscach

Versionsstand: 25. Januar 2022, 14:50

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Taschenrechner, kein Computer (auch nicht wearable), kein Handy.

Fingerübungen

1. Geben Sie den Rang dieser Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Was besagt dieser Wert des Rangs über die Lösungen von linearen Gleichungssystemen mit dieser Koeffizientenmatrix?

2. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' \stackrel{!}{=} e^y \sin(x)$ zur Anfangsbedingung $y(2) \stackrel{!}{=} 3$.

3. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' + 2y \stackrel{!}{=} \sin(3x)$ zur Anfangsbedingung $y(4) \stackrel{!}{=} 5$.

4. Schätzen Sie $\sin(\sin(0{,}01))$, indem Sie die Funktion $x \mapsto \sin(\sin(x))$ an der Stelle $x_0 = 0$ kubisch (!) nähern.

Bitte wenden!

5. Geben Sie die Fourier-Koeffizienten a_0 und b_5 für die Funktion f an, welche die Periode 4 hat und für $t \in [-2;2)$ gleich $|t|$ ist.

6. Geben Sie eine Stelle $(x|y) \in \mathbb{R}^2$ an, an der die Funktion $f(x,y) := \sin(x)\cos(y)$ ein lokales Maximum hat. Begründen Sie mit den ersten und zweiten Ableitungen, warum dort ein lokales Maximum liegt.

Kreative Anwendung

7. Geben Sie Mittelpunkt und Radius eines Kreises im $\mathbb{R}^2$ an, der sowohl die Gerade $y = 1 - x/2$ als auch die Gerade $y = x/2$ als Tangentengeraden hat (keine eindeutige Lösung).

8. Geben Sie die 2×2-Matrix an, die den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 0 und außerdem den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 hat.

9. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' - 3y \stackrel{!}{=} e^{3x}$ zur Anfangsbedingung $y(2) \stackrel{!}{=} 0$.

10. Gehen alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 6y' + 13y \stackrel{!}{=} 0$ für $x \to \infty$ gegen null? Begründung!

11. Geben Sie die Funktion an, deren Laplace-Transformierte gleich $\frac{3}{s^3+s}$ ist.

12. Skizzieren Sie die Höhenlinie $f(x,y) = 1$ der Funktion f, die für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x,y) := |x| + |y|$ definiert wird. Markieren Sie die Einheiten auf den Achsen.