Mathematik 2

Klausur vom 2019-10-02

Musterlösungen

1)

$$\begin{aligned} x + \quad\ z &= 1 \\ 2x + y \quad &= 2 \\ 4y - 8z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \end{matrix} \quad \cdot(-2)$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \end{matrix} \quad \cdot(-4)$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix} \quad ↯$$

Nicht lösbar!

2) Der Rang ist 2. Nein, <u>nicht</u> alle LGS mit dieser Koeffizientenmatrix sind lösbar.

3) $y' = -\, y \cos(2x)$ Trennung der Variablen!

$$\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = -\cos(2x)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\int_5^{y_1} \frac{dy}{y}}_{[\ln|y|]_5^{y_1}} = \underbrace{-\int_3^{x_1} \cos(2x)\, dx}_{-\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_3^{x_1}}$$

$$\Longleftrightarrow \ln|y_1| - \ln(5) = -\frac{1}{2}\sin(2x_1) + \frac{1}{2}\sin(6)$$

hier egal

$$\Longleftrightarrow y_1 = 5 \exp\left(-\frac{1}{2}\sin(2x_1) + \frac{1}{2}\sin(6)\right)$$

4) Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$\Longrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{9+1}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{10}$$, also eines >0 und eines <0.

$\Longrightarrow$ Typischerweise exponentiell anwachsend, aber im seltenen Fall auch abklingend.

5) $$c_0 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_3^4 2\,dt = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\int_0^4 e^{-2\pi i\cdot\frac{3t}{4}} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2 \underbrace{\int_3^4 e^{-2\pi i\cdot\frac{3t}{4}}\,dt}$$

$$\underbrace{\left[\frac{e^{-2\pi i\cdot\frac{3t}{4}}}{-2\pi i\cdot\frac{3}{4}}\right]_3^4}$$

$$\frac{1-e^{-2\pi i\frac{9}{4}}}{-2\pi i\cdot\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\left(-\cancel{2}\pi i\frac{3}{\cancel{4}}\right)}\cdot\left(1-e^{-2\pi i\frac{9}{4}}\right) \quad = e^{-\cancel{2}\pi i\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}}$$

$$= \frac{i}{3\pi}\left(1-e^{-\pi i/2}\right)$$

6) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cdot 2y + 6y$

Also ist der Gradient an $(0|0)$ der Nullvektor.

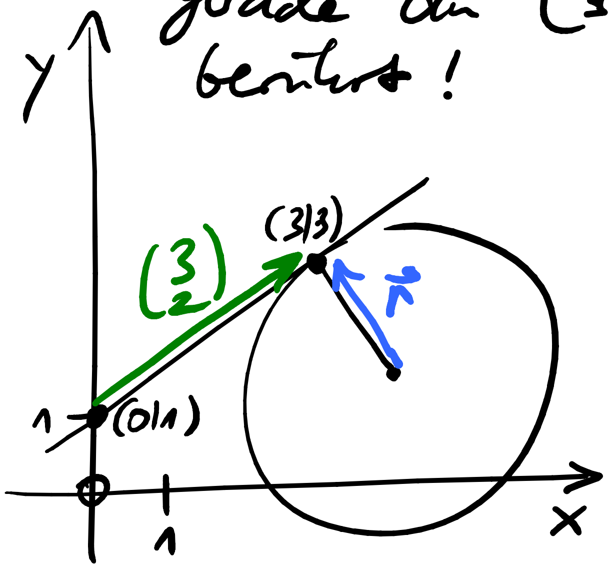
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2+2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2+6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4xy$

Hesse-Matrix an $(0|0)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(\cdot) > 0$, links oben > 0,

also lok. Minimum.

7) Nehmen wir z.B. den Kreis, der die Grade an $(3|3)$ von unten berührt!



Der Radiusvektor $\vec{r}$ muss $\perp \binom{3}{2}$ sein.
Also $\vec{r} = \lambda \binom{-2}{3}$.
Dabei $\lambda > 0$ wegen der Lage unterhalb.

Außerdem muss gelten:

$$2^2 = \|\vec{r}\|^2 = \lambda^2 \binom{-2}{3} \cdot \binom{-2}{3} = \lambda^2 \cdot 13.$$

Also $\lambda = +\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Der Mittelpunkt hat dann den Ortsvektor

$$\binom{x_M}{y_M} = \binom{3}{3} - \vec{r} = \binom{3}{3} - \frac{2}{\sqrt{13}} \binom{-2}{3}.$$

8) Die Menge der Eigenvektoren besteht aus allen Vektoren, die Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind, aber nicht dem Nullfachen.

((Bei der Drehung um 90° verändern alle Vektoren ihre Richtung — bis auf die entlang der Achse. Der Nullvektor ist per Definition kein Eigenvektor.))

9) Ansatz: $x(t) = Ae^{2it}$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = A \cdot (2i)^2 e^{2it} = -4Ae^{2it}$$

Einsetzen in DGL:

$$\underbrace{-4Ae^{2it} + 4Ae^{2it}}_{0} \overset{!}{=} e^{2it}$$

↯

Neuer Ansatz: $x(t) = A \cdot t \cdot e^{2it}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = Ae^{2it} + 2iAte^{2it}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = 2iAe^{2it} + 2iAe^{2it} + (2i)^2 Ate^{2it}$$

Einsetzen in DGL:

$$4iAe^{2it} \cancel{- 4Ate^{2it}} + \cancel{4Ate^{2it}} \overset{!}{=} e^{2it}$$

Also wähle $A = \frac{-i}{4}$.

10) Idee: $(\lambda-1)(\lambda-3)=\lambda^2-4\lambda+3$.

Also zum Beispiel diese DGL:

$$y''-4y'+3y=0$$

11) $$\frac{1}{s^4-1}=\frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}\overset{!}{=}\frac{A+Bs}{s^2+1}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s-1}$$

$$=\frac{(A+Bs)(s^2-1)+C(s^2+1)(s-1)+D(s^2+1)(s+1)}{s^4-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} s^3 & 0=B+C+D \\ s^2 & 0=A-C+D \\ s^1 & 0=-B+C+D \\ s^0 & 1=-A-C+D \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+ \; -} 0=B \qquad \xrightarrow{+ \; -} -1=2A \;\Downarrow\; A=-1/2$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 0 = C+D \\ \frac{1}{2}=-C+D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-1/4 \\ D=1/4 \end{cases}$$

Also $$\frac{1}{s^4-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{s^2+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{1}{4}}{s-1}.$$

Also $$y(t)=-\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}.$$

12) $$V=\int_0^3\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^r dz\right)}_{r}d\varphi\right)}_{2\pi r}r\,dr=2\pi\int_0^3 r^2\,dr$$

$$=2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3$$

$$=18\pi.$$

$\sqrt{x^2+y^2}=r$ in Zylinderkoordinaten