Mathematik 2 vom 2019-07-19

Musterlösungen

1) Ebenengl. z.B.: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Kann das $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ ergeben?

$$\iff \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\iff \lambda = 1 \wedge \mu = 2 \wedge 3\lambda+2\mu = 3 \ \lightning$$

Nein!

2) $$\begin{vmatrix}0&0&0&1&0\\0&2&3&0&2\\-1&1&0&2&0\\0&0&2&0&1\\2&0&2&3&1\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}0&2&3&2\\-1&1&0&0\\0&0&2&1\\2&0&2&1\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}0&2&-1&2\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\2&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}0&2&-1\\-1&1&0\\2&0&0\end{vmatrix}}_{0+0+0-2\cdot1\cdot(-1)-0-0}$$

$$=2.$$

3) $$0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2-0$$

Also nur ein E.W.: $\lambda = 2$.

Ein E.V. dazu: $\underbrace{\begin{pmatrix}2-2&0\\3&2-2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Wähle z.B. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

4) $y' + y^2 x^2 = 0 \iff \frac{y'}{y^2} = -x^2$, trennbare Variablen!

Mit Anfangsbedingung:

$$\underbrace{\int_5^{y_1} \frac{dy}{y^2}}_{\underbrace{\left[-y^{-1}\right]_5^{y_1}}_{-\frac{1}{y_1}+\frac{1}{5}}} = \underbrace{\int_2^{x_1} (-x^2)\,dx}_{\underbrace{\left[-\frac{x^3}{3}\right]_2^{x_1}}_{-\frac{x_1^3}{3}+\frac{8}{3}}}$$

Also $y_1 = 1 \Big/ \left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{5} \right)$.

5) $y' + 7y = e^{-7x}$ ist lin. & inhomogen!

- Allg. Lsg. der homogenen Form $y' + 7y = 0$:

  Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

  $\Rightarrow \lambda = -7$

  Allg. Lsg. der homogenen Form ist also

  $y(x) = A e^{-7x}$

- Eine spez. Lsg. der inhomog. Form:

  Ansatz: $y(x) = B e^{-7x}$ ↯

  2. Ansatz: $y(x) = B x e^{-7x}$

  $\Rightarrow B e^{-7x} + \underbrace{B x e^{-7x} \cdot (-7) + 7 B x e^{-7x}}_{0} = e^{-7x}$

  $\Rightarrow B = 1$

- Allg. Lsg. der inhomogenen Form:

$$y(x) = A e^{-7x} + x e^{-7x}$$

6)

		Werte an $(3\vert 2\vert 4)$:
$\frac{\partial f}{\partial u}$	$= \sin(v^2 - w)$	0
$\frac{\partial f}{\partial v}$	$= u \cdot \cos(v^2 - w) \cdot 2v$	12
$\frac{\partial f}{\partial w}$	$= u \cdot \cos(v^2 - w) \cdot (-1)$	-3

$$f(3{,}01;\, 2{,}02;\, 3{,}97) \approx \underbrace{f(3;2;4)}_{0} + \underbrace{0{,}01 \cdot 0 + 0{,}02 \cdot 12 - 0{,}03 \cdot (-3)}_{0{,}33}$$

7) Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die gesuchte Matrix. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vektor längs der Geraden

und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vektor $\perp$ Gerade

Also: $\left\{\begin{array}{l} 3a - 2b = 3 \\ 3c - 2d = -2 \\ 2a + 3b = -2 \\ 2c + 3d = -3 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5}{13}$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{13} = -\frac{12}{13}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{13}, \quad d = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-5}{13}$$

8) Alle Zeilen der Matrix müssen $\perp$ zu $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und zu $\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$ sein.

Nehme also Vielfache* von

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix},$$

also z.B. die Matrix $\begin{pmatrix}-2 & -5 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

((* Nicht überall das Nullfache, sonst ist der Kern der gesamte $\mathbb{R}^3$.))

9) ((Lineare inhomogene DGL mit Konst. Koeff.!))

Ansatz: $y(x) = x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$$\Rightarrow y'(x) = 4x^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$$

$$\Rightarrow y''(x) = 12x^2 + 6Bx + 2C$$

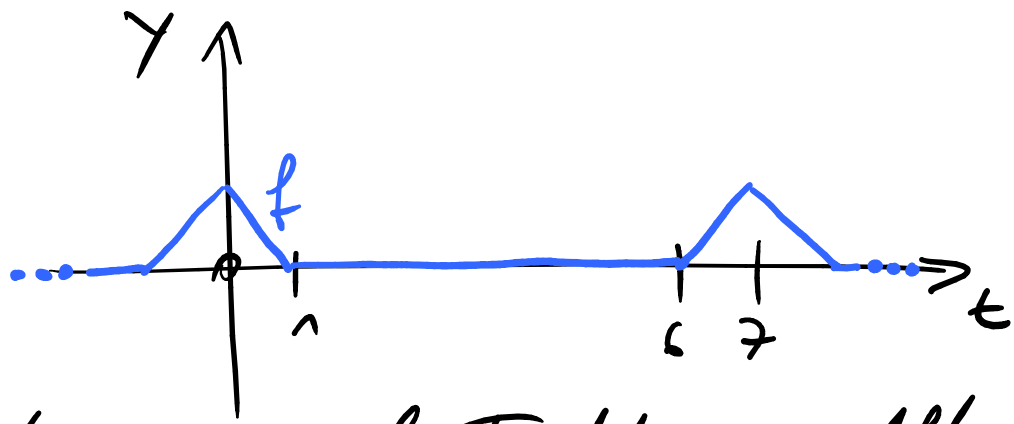
$$\Rightarrow y'''(x) = 24x + 6B$$

Also $24x + 6B + x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \overset{!}{=} x^4$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 & B = 0 \\ x^2 & C = 0 \\ x^1 & 24 + D = 0 \\ x^0 & 6B + E = 0 \end{cases}$$

Wähle z.B. $B = C = E = 0$ und $D = -24$.

10)



f ist eine gerade Funktion. $\Rightarrow$ Alle $b_{..}=0$.

$$a_3 = \frac{2}{7}\int_0^7 \cos\left(2\pi\cdot 3\frac{t}{7}\right) f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{7}\cdot 2\int_0^1 \underbrace{\cos\left(2\pi\cdot 3\frac{t}{7}\right)}_{\frac{\sin\left(2\pi\cdot 3\frac{t}{7}\right)}{2\pi\cdot 3/7}}\cdot\underbrace{(1-t)}_{-1}\,dt$$

Symmetrie von cos · f

$$= \frac{4}{7}\left(\left[\frac{\sin(2\pi\cdot 3t/7)}{2\pi\cdot 3/7}\cdot(1-t)\right]_0^1 \right.$$

$= 0 - 0$

$$\left. + \int_0^1 \frac{\sin(2\pi\cdot 3t/7)}{2\pi\cdot 3/7}\cdot(\cancel{-}1)\,dt\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2\pi\cdot 3/7}\left[\frac{\cos(2\pi\cdot 3t/7)}{2\pi\cdot 3/7}\right]_0^1\right.$$

$$= -\frac{1}{(2\pi\cdot 3/7)^2}\left(\cos\left(2\pi\cdot\frac{3}{7}\right)-1\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{7}}\cdot\frac{1}{\underbrace{\cancel{2}\pi\cdot\frac{3}{\cancel{7}}\cdot\cancel{2}\pi\cdot\frac{3}{7}}_{\frac{7}{9\pi^2}}}\left(-\cos\left(2\pi\cdot\frac{3}{7}\right)+1\right)$$

11) $$\frac{s-5}{s^3+4s} = \frac{s-5}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{s^2+4}$$

$$= \frac{A(s^2+4)+Bs+Cs^2}{s(s^2+4)}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} s^2 & A+C=0 \\ s^1 & B=1 \\ s^0 & 4A=-5 \end{array} \right\} \Longrightarrow A=-5/4, \; C=5/4$$

Also $$\frac{s+1}{s^3+s^2} = -\frac{5}{4}\frac{1}{s} + \underbrace{\frac{1+\frac{5}{4}s}{s^2+4}}_{\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}+\frac{5}{4}\frac{s}{s^2+2^2}}$$

Die Originalfunktion ist also:

$$y(t) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{5}{4}\cos(2t)$$

12) $$x-y^2 \overset{!}{=} f(1|2) = 1-2^2 = -3$$

$$\Longleftrightarrow x = y^2-3$$