Mathematik 2

Musterlösungen vom 2019-01-30

1)

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3y + 4z &= 2 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

formal:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 0 & 4 & \\ 2 & 1 & 1 & 3 & \cdot(-2) \\ 0 & 3 & 4 & 2 & \text{ok} \\ 1 & 2 & -2 & 1 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 0 & 4 & \\ 0 & 3 & 1 & -5 & \\ 0 & 3 & 4 & 2 & \cdot(-1) \\ 0 & 3 & -2 & -3 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 0 & 4 & \\ 0 & 3 & 1 & -5 & \\ 0 & 0 & 3 & 7 & \\ 0 & 0 & -3 & 2 & \cdot(+1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 0 & 4 & \\ 0 & 3 & 1 & -5 & \\ 0 & 0 & 3 & 7 & \\ 0 & 0 & 0 & 9 & ↯ \end{array}$$

Es gibt keine Lösung!

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Kern}$ (diese Matrix)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 & \text{I} \\ 5x \qquad\qquad = 0 & \text{II} \\ 6x \qquad + z = 0 & \text{III} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x \overset{\text{I}?}{=} 0 \wedge z \overset{\text{II}2}{=} 0 \wedge x \overset{\text{III}2}{=} 0$$

Also Kern (diese Matrix) $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Also Defekt (") $= 0$.

((Alternativ: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \ldots$))

3) $y' - 2y = \sin(x)$

linear, inhomogen!

- Allg. Lösung der homogenen Form $y' - 2y = 0$:

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\Longrightarrow \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0$

$\Longrightarrow \lambda = 2$

Allg. Lösung der homogenen Form:

$y(x) = Ae^{2x}$

$\Downarrow$

- Eine spezielle Lösung der inhomogenen Form $y'-2y=\sin(x)$:

Ansatz: $y(x) = C\sin(x) + D\cos(x)$

$$\Rightarrow C\cos(x) - D\sin(x) - 2C\sin(x) - 2D\cos(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C - 2D = 0 \\ -2C - D = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{-5} = -\dfrac{2}{5} \\[2ex] D = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Also eine spezielle Lösung der inhomogenen Form: $y(x) = -\frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)$

- Allgemeine Lösung der inhomogenen Form:

$$y(x) = A\,e^{2x} - \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)$$

- Randbedingung einbauen:

$$y(5) \overset{!}{=} 3 \Rightarrow$$

$$3 = Ae^{10} - \frac{2}{5}\sin(2) - \frac{1}{5}\cos(2)$$

$$\Rightarrow A = e^{-10}\cdot\left(3 + \frac{2}{5}\sin(2) + \frac{1}{5}\cos(2)\right).$$

4) $y' = (x+2)y$ trennbare Variablen!

$$\Longrightarrow \quad „\frac{dy}{y} = (x+2)\,dx"$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\int_3^{y_1} \frac{dy}{y}}_{\left[\ln|y|\right]_3^{y_1}}}_{\ln\left(\frac{|y_1|}{3}\right)} = \underbrace{\underbrace{\int_5^{x_1} (x+2)\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_5^{x_1}}}_{\frac{x_1^2}{2}+2x_1 \underbrace{-\frac{25}{2}-10}_{-22\frac{1}{2}}}$$

$y_1 > 0$

$$\Longrightarrow \quad y_1 = 3e^{\frac{x_1^2}{2}+2x_1-22\frac{1}{2}}$$

5) $$\frac{d \;\; 1/\ln(x)}{dx} = -\frac{1}{\ln(x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2 \;\; 1/\ln(x)}{dx^2} = \left(2\frac{1}{\ln(x)^3} \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln(x)^2} \cdot \left(\frac{2}{\ln(x)} + 1\right)$$

Werte an $x = e$:

Funktion: 1

1. Ableitung: $-\frac{1}{e}$

2. Ableitung: $\frac{3}{e^2}$

Also $$\frac{1}{\ln(e+0{,}03)} \approx 1 - \frac{0{,}03}{e} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{e^2}(0{,}03)^2$$

in Grün: Werte an $(2|1)$

6) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\cdot\sin(\underbrace{x+y-3}_{0}) + (\underbrace{x-y-1}_{0})\cos(x+y-3)$$
$= 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1\cdot\sin(x+y-3) + (x-y-1)\cos(x+y-3)$$
$= 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(x+y-3) + \cos(x+y-3) - (x-y-1)\sin(x+y-3)$$
$= 1+1-0$

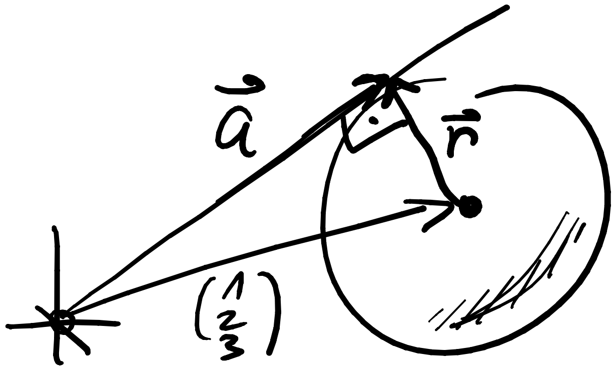
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(x+y-3) - \cos(x+y-3) - (x-y-1)\sin(x+y-3)$$
$= -1-1-0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x+y-3) - \cos(x+y-3) - (x-y-1)\sin(x+y-3)$$

$= 1-1-0$

Also an $(2|1)$ Gradient = Nullvektor und
$\det(\text{Hesse-Matrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0.$

7)



$$\begin{cases} \|\vec{r}\| = 2 & \mathrm{I} \\ \vec{a}\cdot\vec{r} = 0 & \mathrm{II} \\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \vec{r} = \vec{a} & \mathrm{III} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{r} + \underbrace{\vec{r}\cdot\vec{r}}_{2^2} = \vec{a}\cdot\vec{r} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{r} = -4 \qquad \mathrm{VI}$$

$\vec{r}$ muss also I und VI erfüllen. Wähle z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$. Dann $\vec{a} \underset{\mathrm{III}}{=} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

und I, II, III sind erfüllt.

Also Tangentengerade z.B. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

8) Es muss sich um eine Ebene durch den Ursprung handeln. Sei $\vec{n} \neq 0$ ein Vektor $\perp$ zu dieser Ebene. Dann:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{pmatrix}\vec{n} = -\vec{n}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}10 & -4 & -8\\ -4 & 16 & -4\\ -8 & -4 & 10\end{pmatrix}\vec{n} = 0$$

$\vec{n}$ muss also $\perp$ zu $\begin{pmatrix}10\\-4\\-8\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix}$ und

$\perp$ zu $\begin{pmatrix}-4\\16\\-4\end{pmatrix}$ sein. $= (-4)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\vec{n}$ ist Vielfaches von $\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-2-16\\-4-5\\-20+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\-9\\-18\end{pmatrix} = (-9)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Also:

Ebenengleichung z.B.: $2x + y + 2z = 0$.

9) $$18 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -d \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{0+0+0-6-0-0}$$

$$= 6d$$

Also: Man weiß nur, dass $d = 3$.

10) linear, inhomogen, konst. Koeff.

Also Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$.

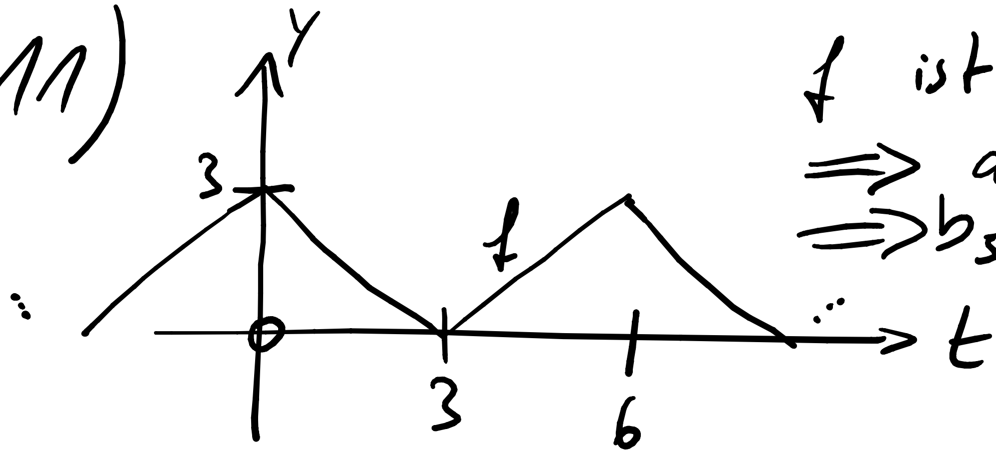
$\Longrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + a = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - a}$

$\downarrow$

Alle Lösungen gehen für $t \to \infty$ gegen 0 genau dann, wenn die Realteile beider $\lambda_{1,2}$ negativ sind. Also genau dann, wenn

$$\operatorname{Re}\left(\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-a}\right) < \frac{5}{2}$$; also genau dann, wenn $a > 0$.

11)



f ist gerade
$\Longrightarrow$ alle $b_\cdot$ sind $=0$.
$\Longrightarrow b_5 = 0$.

$$a_5 = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}} \int_0^6 \cos\left(\cancel{2}\pi 5 \cdot \frac{t}{\cancel{6}_{3}}\right) f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot \int_0^3 \cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right)(3-t)\,dt$$

$$\uparrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{3}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \qquad -1$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{3}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)\cdot(3-t)\right]_0^3 - \int_0^3 \left(\frac{3}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)\right)\cdot(-1)\,dt\right)$$

$\downarrow$

$$= \frac{2}{3}\left(0-0+\frac{3}{5\pi}\underbrace{\int_0^3 \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)dt}_{\underbrace{\left[-\frac{3}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right)\right]_0^3}_{-\frac{3}{5\pi}\cdot(-1-1)}}\right)$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{5\pi}\cdot\left(-\frac{3}{5\pi}\right)\cdot(-2)$$

$$= \frac{12}{25\pi^2}$$

12) $$\frac{s+3}{s^3+s^2} = \frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+1}$$

$s^2(s+1)$

$$= \frac{A(s+1)+Bs(s+1)+Cs^2}{s^2(s+1)}$$

$$\Longrightarrow s+3 = A(s+1)+Bs(s+1)+Cs^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} s^2: & 0 = B+C \\ s^1: & 1 = A+B \\ s^0: & 3 = A \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A=3 \wedge B=-2 \wedge C=2$$

Also $\bar{Y}(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1}$.

Damit $y(t) = 3t - 2 + 2e^{t}$.