Mathematik 1 vom 2019-02-01

Musterlösungen

1) $\log_4\left(13+\sqrt{x+1}\right)=2$

$\iff 13+\sqrt{x+1}=16$

$\iff \sqrt{x+1}=3$

$\iff x=8$

2) $z^2-2z+3=0$

$\iff z=1\pm\sqrt{1-3}$

$=1\pm\sqrt{2}\,i$

Zahl	Länge	Winkel*
$1+\sqrt{2}\,i$	$\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{3}$	$\arctan(\sqrt{2})$
$1-\sqrt{2}\,i$	$\sqrt{3}$	$-\arctan(\sqrt{2})\ \cancel{-180°}$

* ggf. plus ganzzahlige Vielfache von 360°

3) Zum Beispiel:

$$f(x)=\frac{(x-3)\cdot 4x}{(x-2)^2}$$

4) Ja, sie hat einen Grenzwert und zwar 0, weil e^n im Nenner schneller wächst als alle die anderen Terme.

5)
$$\frac{d\left(\sin(e^x)+\sqrt{x}\right)^3}{dx}$$

$$= 3\left(\sin(e^x)+\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(\cos(e^x)e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

6)
$$\frac{d \frac{1}{x^2-6x+16}}{dx} = -\frac{1}{(x^2-6x+16)^2}\cdot(2x-6)$$

Das wird nur für $x=3$ gleich 0. Man weiß obendrein, dass $\frac{1}{x^2-6x+16}$ eine rationale Funktion mit Asymptote 0 für $x \to \pm\infty$ ist und dass diese Funktion für alle x definiert und stetig ist. Also muss an $x=3$ ein <u>globales</u> Extremum liegen.

Der Funktionswert an $x=3$ ist $\frac{1}{9-18+16} = \frac{1}{7}$. Also ist dies das globale Maximum.

7) $(x-7)^2 \geq 2x$

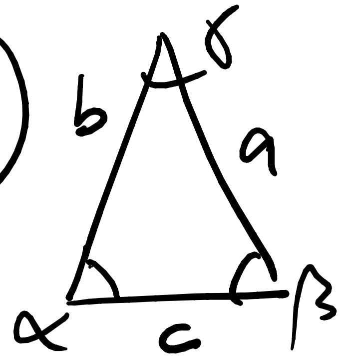
$\iff x^2-14x+49 \geq 2x$

$\iff \underbrace{x^2-16x+49}_{} \geq 0$

positiv für $x \to \pm\infty$,
geht durch 0 an $x = 8 \pm \sqrt{\underbrace{64-49}_{15}}$

$\iff x \leq 8-\sqrt{15} \vee x \geq 8+\sqrt{15}$

Also $\mathbb{L} = (-\infty; 8-\sqrt{15}] \cup [8+\sqrt{15}; \infty)$.

8) 

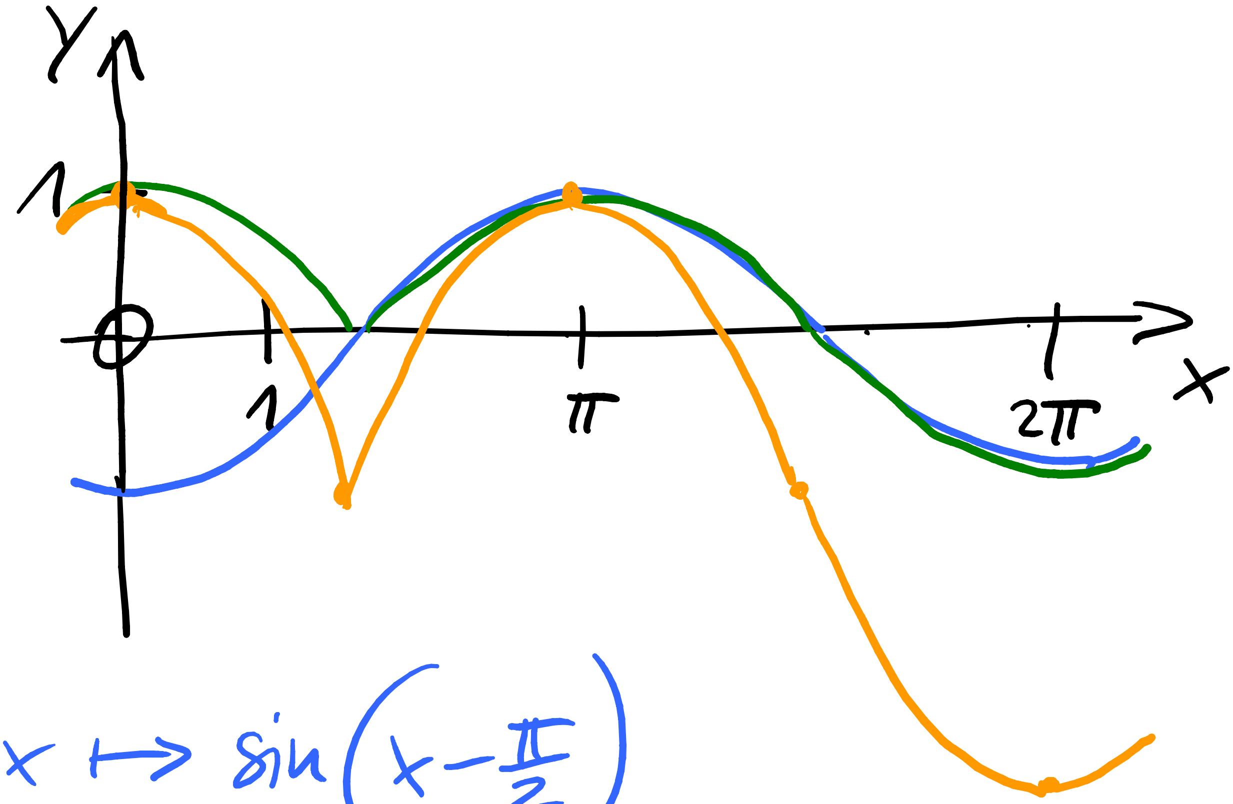
$4 = \text{Flächeninhalt} = \frac{1}{2} \underbrace{a}_{3} \underbrace{b}_{3} \cdot \sin(\gamma)$

$\implies \sin(\gamma) = \frac{8}{9}$

$\implies \gamma = \arcsin\left(\frac{8}{9}\right)$

$\vee\ \gamma = 180° - \arcsin\left(\frac{8}{9}\right)$ Nicht eindeutig!

9)



$x \mapsto \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$x \mapsto \sin\left(\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right)$

$x \mapsto 2\sin\left(\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right)-1$

10)

$$x_S = \frac{\int_1^2 x\cdot(4x^2-3x)\,dx}{\int_1^2 (4x^2-3x)\,dx}$$

$$= \frac{\int_1^2 (4x^3-3x^2)\,dx}{\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2} = \frac{\left[x^4-x^3\right]_1^2}{\frac{4}{3}\cdot\cancel{8}^{\,7}-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{\,2}-\cancel{\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}}$$

$$\left(\left(= \frac{16-8-\cancel{1}+\cancel{1}}{\frac{28}{3}-6+\frac{3}{2}} = \frac{8}{\frac{56-36+9}{6}} = \frac{48}{29}\right)\right)$$

11) $P = P(3\text{ rote}) + P(3\text{ grüne}) + P(3\text{ blaue})$

$= \frac{10}{33} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{8}{31} + \frac{11}{33} \cdot \frac{10}{32} \cdot \frac{9}{31} + \frac{12}{33} \cdot \frac{11}{32} \cdot \frac{10}{31}$

$\left(\left(= \frac{505}{5456} \right) \right)$

12) Wahrscheinlichkeitsdichte p ist $\frac{1}{3}$ zwischen 1 und 4, sonst 0.

$E[\sqrt{X}] = \int_1^4 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{3}\, dx$

$= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (8 - 1)$

$= \frac{14}{9}$

$\sigma_{\sqrt{X}} = \sqrt{Var(\sqrt{X})} = \sqrt{E[\sqrt{X}^2] - E[\sqrt{X}]^2}$

$= \sqrt{E[X] - \left(\frac{14}{9}\right)^2} = \sqrt{2\frac{1}{2} - \left(\frac{14}{9}\right)^2}$

$\left(\left(\approx 0{,}28 \right) \right)$