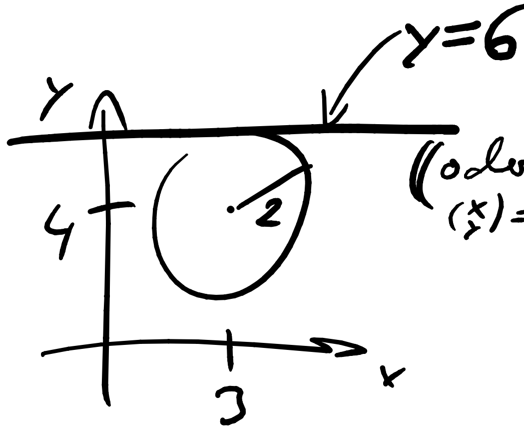
# Mathematik 2 vom 2018-10-05

## Musterlösungen

1. ((Zum Beispiel:))




((oder $\binom{x}{y} = \binom{0}{6} + \lambda\binom{1}{0}$))

2. $y' = \frac{x}{e^{5y}} \Rightarrow e^{5y}\, y' = x$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_4^{y_1} e^{5y}\,dy}_{\left[\frac{e^{5y}}{5}\right]_4^{y_1}} = \underbrace{\int_3^{x_1} x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{x_1}}$$

$$\Rightarrow e^{5y_1} = e^{20} + \frac{5}{2}(x_1^2 - 9)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{5}\ln\left(e^{20} + \frac{5}{2}(x_1^2 - 9)\right)$$

3. Allg. Lsg. der homog. Form: $y(x) = Ae^{-2x}$

Eine spez. Lsg. der inh. Form:

Ansatz: $y(x) = B\sin(3x) + C\cos(3x)$

$\Rightarrow y'(x) = 3B\cos(3x) - 3C\sin(3x)$

$$\Longrightarrow 3B\cos(3x) - 3C\sin(3x) + 2B\sin(3x) + 2C\cos(3x) = \sin(3x)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3B + 2C = 0 \\ 2B - 3C = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-9-4} = \frac{2}{13}, \quad C = -\frac{3}{13}$$

Also allg. Lsg.: $y(x) = Ae^{-2x} + \frac{2}{13}\sin(3x) - \frac{3}{13}\cos(3x)$

4. $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$

$$99^5 = f(100-1)$$
$$\approx 100^5 + 5\cdot 100^4\cdot(-1) + \overset{1}{\cancel{2}}0\cdot 100^3\cdot\frac{(-1)^2}{\cancel{2}}$$

$$\big(= 10.000.000.000 - 500.000.000 + 10.000.000$$
$$= 9.510.000.000\big)$$

5. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 2x + 3y^2 + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 2x + 3y^2 + 4y + 2$$

$(1|-1)$ einsetzen: $\boxed{\text{Ja, } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sind dort } 0.}$

Wert an $(1|-1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6y + 2 \longrightarrow 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x + 6y + 4 \longrightarrow 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x + 6y + 2 \longrightarrow 2$$

Also Hesse-Matrix an $(1|-1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det(\cdot/.) = 8-4 > 0}$, $\boxed{\text{links oben} > 0.}$

Hinreichendes Kriterium für lok. Min erfüllt!

6. $$V = \int_5^{10} \Bigg( \underbrace{\int_1^2 \Big( \underbrace{\int_0^r d\varphi}_{r} \Big) r\,dr}_{\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}} \Bigg) dz = \frac{35}{3}.$$

7. ((zum Beispiel:))

Gerade: $a \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Ebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. Die beiden Vektoren sind zueinander parallel.

9. Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

ist quadratisch. Also gibt es genau eine Lösung, wenn $\underbrace{\det(\cdot/\cdot)}_{\substack{1\cdot 1\cdot 3+0-8a-0-0-6 \\ =-8a-3}} \neq 0$,

also wenn $a \neq -\frac{3}{8}$.

10. ((Zum Beispiel:)) $\begin{pmatrix} 2 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

((Dann gilt $\det(\text{Matrix} - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda-2)^3$.))

11. Allg. Lsg. der homog. Form $y'' + 2y' + y = 0$:

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

(nur ein $\lambda$!)

Also allg. Lsg. der homog. Form:

$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$

Eine spez. Lsg. der inh. Form $y''+2y'+y=x$:

Ansatz: $y(x) = Cx + D$

$$\Longrightarrow 0 + 2C + Cx + D = x$$

$$\Longrightarrow C = 1, D = -2$$

Damit ist die allg. Lsg. der urspr. DfL:

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + x - 2$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} 5 \overset{!}{=} Ae^{-1} + B \cdot 1 \cdot e^{-1} + 1 - 2 \\ 3 \overset{!}{=} -Ae^{-1} + B(\underbrace{1 \cdot (-e^{-1}) + e^{-1}}_{0}) + 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B = 6e \\ A = -2e \end{cases} \Longrightarrow B = 8e$$

Also gesuchte Lsg.: $y(x) = (8x-2)e^{1-x} + x - 2$.

12.


Also $c_0 = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{7} = \frac{11}{7}$.

$$c_4 = \frac{1}{7} \int_0^7 e^{-2\pi i 4 \frac{t}{7}} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{7}\left(\int_0^3 e^{-2\pi i\cdot 4\frac{t}{7}}\cdot 1\,dt + \int_3^7 e^{-2\pi i\cdot 4\frac{t}{7}}\cdot 2\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\left[\frac{e^{-2\pi i\, 4\frac{t}{7}}}{-2\pi i\cdot\frac{4}{7}}\right]_0^3 + 2\cdot\left[\frac{e^{-2\pi i\cdot 4\frac{t}{7}}}{-2\pi i\cdot \frac{4}{7}}\right]_3^7\right)$$

$$= \frac{\cancel{7}i}{\cancel{7}\cdot 8\pi}\left(e^{-2\pi i\cdot\frac{12}{7}} - 1 + 2\cdot\left(e^{-2\pi i\cdot\frac{4\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}}} - e^{-2\pi i\cdot\frac{12}{7}}\right)\right)$$

$$\Big(\Big( = \frac{i}{8\pi}\left(2\underbrace{\cancel{e^{-2\pi i\cdot 4}}}_{1} - 1 - \underbrace{\cancel{e^{-2\pi i\cdot\frac{12}{7}}}}_{e^{2\pi i\cdot\frac{2}{7}}}\right)$$

$$= \frac{i}{8\pi}\left(1 - e^{\frac{4}{7}\pi i}\right) \Big)\Big)$$