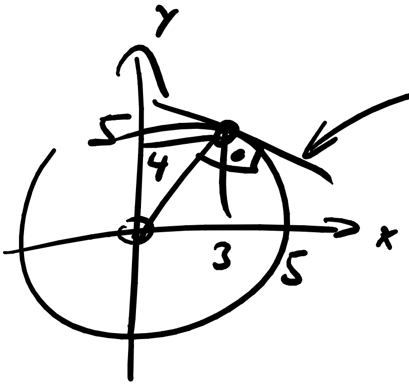
Mathematik 2 vom 2018-02-06

Musterlösungen

1.



Geradengleichung z.B.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

((senkrecht zueinander!))

2. Koeffizientendeterminante $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 + 0 - 6 - (-1) - 0 - 0 = -4$

$\neq 0$, also existiert eine eindeutige Lösung.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2+0-3-0-0-0}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1+0+0-(-1)-0-4}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0+0+12-2-3-0}{-4} = -\frac{7}{4}$$

3. Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{y} = -\sin(x)\,dx, \quad \text{also} \quad \underbrace{\int_3^{y_1} \frac{dy}{y}}_{\ln\left|\frac{y_1}{3}\right|} = \underbrace{-\int_2^{x_1} \sin(x)\,dx}_{\cos(x_1)-\cos(2)}$$

Betrag fällt weg, weil $\frac{y_1}{3} > 0$

$$\Longrightarrow y_1 = 3e^{\cos(x_1)-\cos(2)}.$$

4. Allgemeine Lösung der homogenen Form $y' - y = 0$:

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$\Longrightarrow \lambda e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = 1$$

Allg. Lsg der homog. Form: $y(x) = Ae^x$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Form $y' - y = -x^2$:

Ansatz: $y(x) = Bx^2 + Cx + D$

$$\Longrightarrow 2Bx + C - Bx^2 - Cx - D = -x^2$$

$$\Longrightarrow B = 1 \wedge C = 2 \wedge D = 2$$

Also ist die allg. Lsg. der ursprüngl. DGL:

$$y(x) = Ae^x + x^2 + 2x + 2$$

Anfangsbedingung: $7 \overset{!}{=} Ae^5 + \underbrace{5^2+2\cdot 5+2}_{37}$

$\Rightarrow A = -30/e^5$

Gesuchte Lösung damit: $y(x) = -\frac{30}{e^5}e^x + x^2 + 2x + 2$

5. $\frac{1}{s^2-7s+12} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-4}$

$(s-3)(s-4)$

$\Rightarrow A = -1$

$\wedge\ B = 1$

$\Rightarrow y(t) = -e^{3t} + e^{4t}$

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+3y) + 4\sin(y-4x)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -3\sin(x+3y) - \sin(y-4x)$

Beides $=0$ zum Beispiel für $x=0=y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+3y) - 16\cos(y-4x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9\sin(x+3y) - \cos(y-4x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\cos(x+3y) + 4\cos(y-4x)$

Hesse-Matrix an (0/0) :

$$\begin{pmatrix} -17 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Determinante (v.) $= (-17)\cdot(-10) - 1\cdot 1 > 0$

Links oben < 0.

Dies & Gradient $= \vec{0}$,
also hinreichende Bedingung
für lok. Max. erfüllt.

7. Drehungsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M$.

$\binom{2}{3}$ soll wieder $\binom{2}{3}$ werden. Also:

$$\binom{2}{3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\binom{2}{3}}_{\binom{-3}{2}} + \vec{b}$$

$$\Longrightarrow \vec{b} = \binom{2}{3} - \binom{-3}{2} = \binom{5}{1}$$

8. Die Matrix hat offensichtlich den Rang 3, wie man an den ersten drei Spalten sieht. Also hat sie den Defekt $4-3=1$.
Der Defekt ist >0, also können die Lösungen von lin. Gleichungssystemen mit dieser Koeffizientenmatrix nie eindeutig sein (falls es überhaupt welche gibt).

9. Der Eigenvektor zum Eigenwert 1 muss längs der Spiegelachse liegen.
Senkrecht dazu muss ein Eigenvektor mit Eigenwert -1 sein.
Also gilt für die gesuchte Spiegelungsmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+3b=2 \\ 2c+3d=3 \\ -3a+2b=3 \\ -3c+2d=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-5}{13} \\ b=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}/13=12/13 \\ c=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}/13=12/13 \\ d=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}/13=5/13 \end{array}\right.$$

10. Allgemeine Lösung der homogenen Form $y''-9y=0$:

Ansatz: $y=e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - 9e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Also allg. Lsg. der homogenen Form:

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Form $y''-9y=e^{3x}$:

Ansatz: $y = Ce^{3x}$

$$\Rightarrow \underbrace{C\cdot 9\cdot e^{3x} - 9Ce^{3x}}_{0} = e^{3x} \ ↯$$

neuer Ansatz: $y = C\cdot xe^{3x}$

$$\Rightarrow y' = C(e^{3x} + x\cdot 3e^{3x})$$

$$\Rightarrow y'' = C(\underbrace{3e^{3x} + 3e^{3x}}_{6e^{3x}} + x\cdot 9e^{3x})$$

Einsetzen:

$$C(6\cancel{e^{3x}} + \cancel{x\cdot 9e^{3x}}) - \cancel{9\cdot Cxe^{3x}} = \underset{1}{\cancel{e^{3x}}}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{6}$$

Also allg. Lsg. der ursprünglichen DGL:

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x} + \frac{1}{6}xe^{3x}$$

11.

$$c_0 = \frac{1}{5}\int_0^5 \underset{\downarrow\, 1}{t}\, \underset{\uparrow\, e^t}{e^t}\, dt = \frac{1}{5}\left[t e^t\right]_0^5 - \frac{1}{5}\underbrace{\int_0^5 1\, e^t\, dt}_{e^5 - e^0}$$

$$= \frac{1}{5}\left(5e^5 - 0\right) - \frac{1}{5}\left(e^5 - 1\right) = \left(4e^5 + 1\right)/5$$

$$c_3 = \frac{1}{5}\int_0^5 e^{2\pi i 3t/5}\, t e^t\, dt$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^5 \underbrace{e^{\left(2\pi i \cdot \frac{3}{5} + 1\right)t}}_{\uparrow\ \frac{e^{\left(2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1\right)t}}{2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1}}\ \underset{\downarrow\, 1}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{e^{\left(2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1\right)t}}{2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1}\, t\right]_0^5 - \frac{1}{5}\int_0^5 \frac{e^{\left(2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1\right)t}}{2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1}\, 1\, dt$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{e^{\overset{\text{egal}}{\cancel{2\pi i \cdot 3}}+5} \cdot 5 - e^0 \cdot 0}{2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1} - \frac{1}{5}\,\frac{e^{\cancel{2\pi i \cdot 3}+5} - e^0}{\left(2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^5}{2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1} - \frac{1}{5}\,\frac{e^5 - 1}{\left(2\pi i \cdot \frac{3}{5}+1\right)^2}$$

12. $x_0 = 8$,

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$,

$f(8) = 2$, $f'(8) = \frac{1}{12}$.

Also: $\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\approx 2 + \frac{1}{12}(x-8)} = 2{,}001$

$\Longrightarrow 0{,}001 \approx \frac{1}{12}(x-8)$

$\Longrightarrow x \approx 8{,}012$