Mathematik 1 vom 2018-02-09

Musterlösungen

1. $\sqrt[5]{x^6+7} = 10 \iff x^6+7 = 100000$

$\iff x^6 = 99993 \iff x = \pm\sqrt[6]{99993}$

2. $x^2-2x+1 = (x-1)^2$

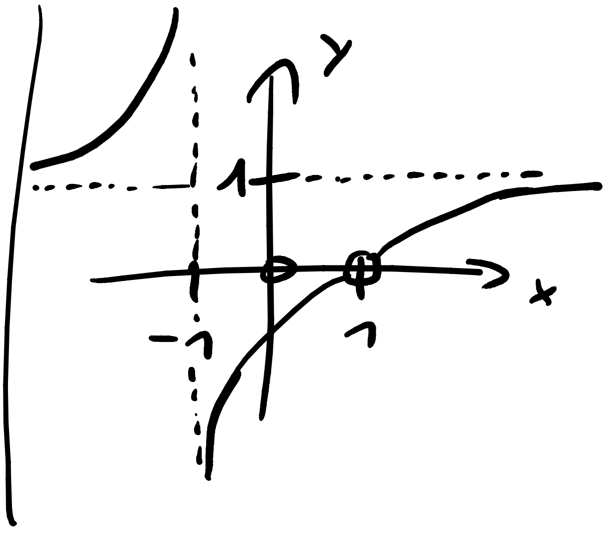
z.B. pq-Formel anwenden

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$

Also $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Keine gemeinsamen Nullstellen mehr

Damit Polstelle bei $x=-1$, sonst keine Polstelle.
Eigentlich eine Nullstelle bei $x=1$ aber da ist eine Definitionslücke der Originalfunktion.



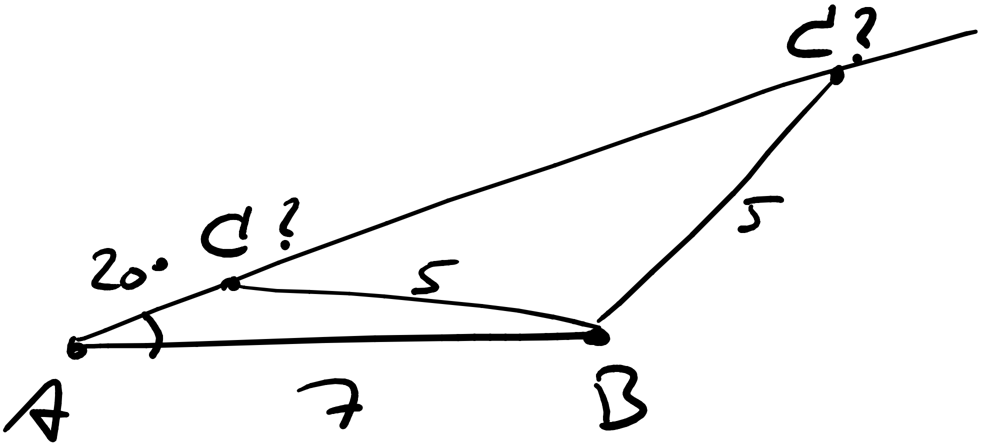
Asymptote für $x \to \pm\infty$:

$(x-1):(x+1) = 1$ Rest -2

$-(x+1)$

-2

3.



Die Länge der Seite AC ist **nicht** eindeutig festgelegt!

Oder mit Cosinussatz und pq-Formel.

$$\frac{\sin(20°)}{5} = \frac{\sin(\gamma)}{7}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{7}{5}\sin(20°)\right)$$

$$\vee\ \gamma = 180° - \gamma.$$

Und damit gilt für die gesuchte Länge b:

$$\frac{5}{\sin(20°)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow b = 5\,\frac{\sin(\beta)}{\sin(20°)}$$

$180° - 20° - \gamma$

Also $b = 5\,\dfrac{\sin\left(160° - \arcsin\left(\frac{7}{5}\sin(20°)\right)\right)}{\sin(20°)}$

$\vee\ b = 5\,\dfrac{\sin\left(-20° + \arcsin\left(\frac{7}{5}\sin(20°)\right)\right)}{\sin(200°)}$.

((Zahlenergebnisse: $\approx 11{,}0$ und $\approx 2{,}3$))

4. $$\frac{d\gamma}{dx} = \cos\left(\sqrt{3x+4}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \cdot 3$$

5. $$\int_1^5 x \cos(x+7)\,dx$$

$$x \downarrow 1 \qquad \cos(x+7) \uparrow \sin(x+7)$$

$$= \left[x\sin(x+7)\right]_1^5 - \underbrace{\int_1^5 1\cdot\sin(x+7)\,dx}_{\left[-\cos(x+7)\right]_1^5}$$

$$= 5\sin(12) - \sin(8) + \cos(12) - \cos(8)$$

6. Z nimmt drei Werte an:

$z=-1$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{14}$,

$z=0$ " " $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7} = \frac{1}{2}$

$z=1$ " " $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7} = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{14}_{\,7}}$

Also $$E[Z^3] = \frac{1}{14}\cdot(-1)^3 + \frac{1}{2}\,0^3 + \frac{3}{7}\,1^3$$

$$= -\frac{1}{14} + \frac{3}{7} = \frac{-1+6}{14} = \frac{5}{14}$$

7. Der Faktor ist $\binom{9}{2}\binom{7}{3}\cdot 2^2\cdot(-1)^3$

$$= -\frac{9\cdot\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{2}\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\cdot 4 = -9\cdot 4\cdot 7\cdot 20 = 5040.$$

8. $|x^2-1| \geq 3$

$$\Longleftrightarrow \cancel{x^2-1 \geq 0} \wedge x^2-1 \geq 3$$

$$\vee \cancel{x^2-1 < 0} \wedge \underbrace{-(x^2-1) \geq 3}_{\Leftrightarrow x^2-1 \leq -3}$$

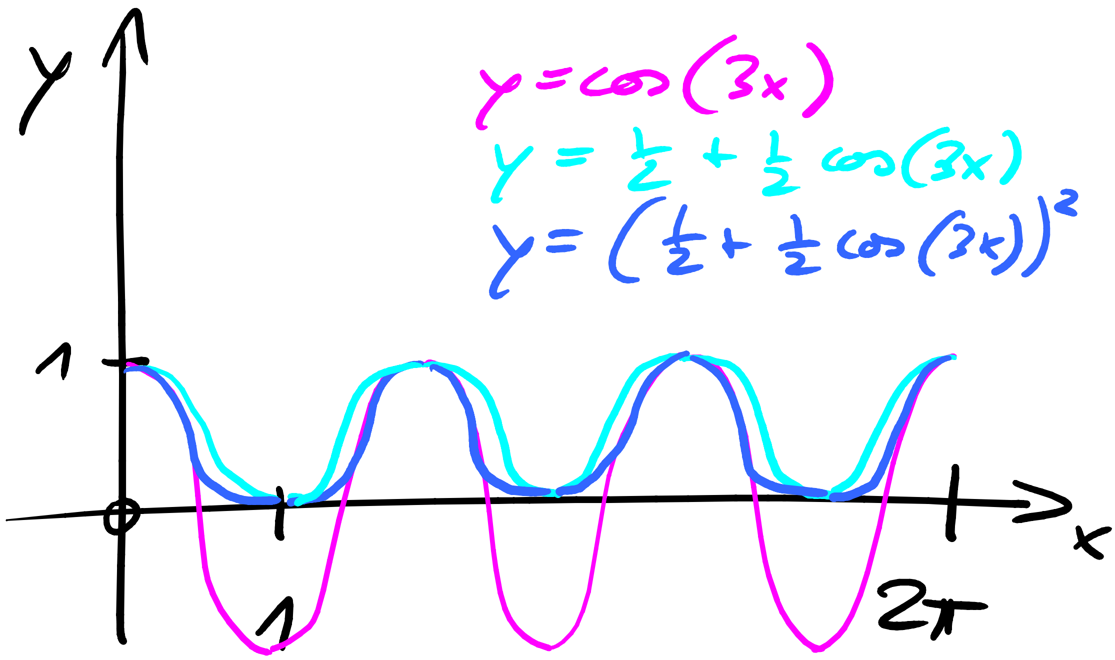
$$\Longleftrightarrow \underbrace{x^2-1 \geq 3}_{\Leftrightarrow x^2 \geq 4} \vee \underbrace{x^2-1 \leq -3}_{x^2 \leq -2}$$

immer falsch

$$\Longleftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

9.



10. $$\underbrace{z^5 - 9z}_{z\cdot\underbrace{(z^4 - 9)}_{(z^2-3)(z^2+3)}} = 0 \iff z = 0 + 0i \lor z = \sqrt{3} + 0i \lor z = -\sqrt{3} + 0i \lor z = 0 + \sqrt{3}i \lor z = 0 - \sqrt{3}i$$

11. Lokales Minimum ?

Notwendig: $0 = f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + \cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}$

$\iff \ln(x) = -1 \iff x = \frac{1}{e}$

Prüfe mit zweiter Ableitung:

$f''(x) = \frac{1}{x}$, $f''(\frac{1}{e}) = e > 0$,

also wirklich lok. Min.

Wert dort: $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

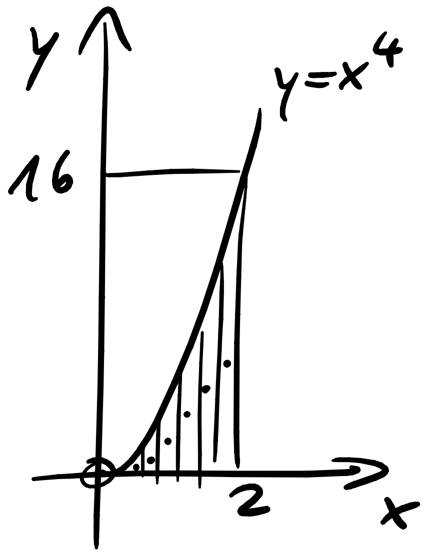
Ist der Wert am Rand kleiner?

$f(\frac{1}{e^5}) = \frac{1}{e^5}\ln(\frac{1}{e^5}) = -\frac{5}{e^5} >$

$f(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0 >$

Also ist der gesuchte kleinste Wert: $-\frac{1}{e}$.

12.



$$y_S = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2} x^8 \, dx}{\int_0^2 x^4 \, dx}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^2}{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^9/9}{2^5/5} = \frac{5}{9} \cdot 8$$

$$\left(\left(= \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}\right)\right)$$