Mathematik 2

Klausur vom 2017-10-13

Musterlösungen

1) Ortsvektor des Mittelpunkts $= \begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{2+3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$,

ein Richtungsvektor der Strecke $= \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ein Vektor senkrecht dazu $= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Also Geradengl. für Mittelsenkrechte

z.B. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2)

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-3)$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 1 \end{array} \quad \cdot(-2)$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \iff \begin{cases} z = -1/3 \\ y = 5\cdot(-1/3) = -5/3 \\ x = 1 - 1\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \quad = 1 + \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

3) Lineare DGL, inhomogen!

- homogene Form: $y'' + y = 0$

  Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

  $\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

  allg. Lösung der homogenen Form:

  $y(x) = A e^{ix} + B e^{-ix}$

- inhomogene Form: $y'' + y = x^5$

  Ansatz: $y = Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H$

  $\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot Cx^3 + 4 \cdot 3 \cdot Dx^2 + 3 \cdot 2 \cdot Ex + 2 \cdot 1 \cdot F$
  $+ Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = x^5$

  $\Rightarrow C = 1,\ D = 0,\ 20C + E = 0,\ 12D + F = 0,$
  $6E + G = 0,\ 2F + H = 0$

  $\Rightarrow C = 1,\ D = 0,\ E = -20,\ F = 0,\ G = 120,\ H = 0$

  eine spezielle Lösung der inhomogenen Form:

  $y(x) = x^5 - 20x^3 + 120x$

- Allgemeine Lösung der inhomogenen Form:

  $y(x) = A e^{ix} + B e^{-ix} + x^5 - 20x^3 + 120x$

4) $y' = x^2 y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = x^2 dx$

Also $\int_5^{y_1} \frac{dy}{y} = \int_2^{x_1} x^2 dx$.

$\Rightarrow \ln|y_1| - \ln|5| = \frac{x_1^3}{3} - \frac{2^3}{3}$

$\Rightarrow y_1 = 5 e^{(x_1^3 - 8)/3}$

5) $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x}^3}$

$f(25)=5$, $f'(25)=\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \sqrt{25{,}02} \approx 5+\frac{1}{10}\cdot 0{,}02 = 5{,}002$$

$$|\text{Fehler}| \le \underbrace{\underbrace{\max_{25\le x\le 25{,}02}\left|-\frac{1}{4\sqrt{x}^3}\right|}_{\frac{1}{4\sqrt{25}^3}=\frac{1}{500}} \cdot \frac{0{,}02^2}{2}}_{\frac{0{,}0004}{500\cdot 2}=0{,}0000004}$$

fallende Funktion!

6) f ist gerade. $\Rightarrow$ Alle b... sind null.

$$a_5 = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \int_{-2}^{2} \cos\left(\cancel{4}^{1}\pi\cdot 5t/\cancel{4}_{2}\right)\left(|t|-1\right)dt$$

gerade Funktion

wird durch $\cdot\cos$ weggemittelt

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\int_0^2 \cos\left(\tfrac{5}{2}\pi t\right) t\, dt = 0-\frac{2}{5\pi}\int_0^2 \sin\left(\tfrac{5}{2}\pi t\right)dt$$

$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi t\right)}{\frac{5}{2}\pi}$ $\quad 1$

$$= -\left(\frac{2}{5\pi}\right)^2\left[-\cos\left(\tfrac{5}{2}\pi t\right)\right]_0^2$$

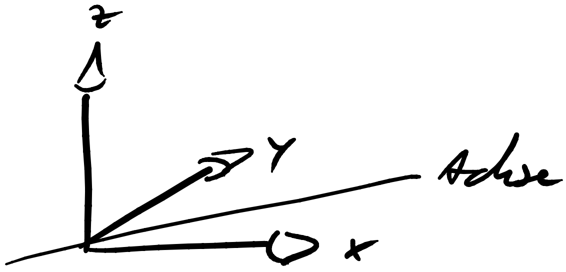
$$= -\frac{4}{25\pi^2}\left(-\underbrace{\cos(5\pi)}_{-1}+\underbrace{\cos(0)}_{1}\right) = -\frac{8}{25\pi^2}$$

7) Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang = 2, Defekt = 0

8)



$$M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Also $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9) Lineare DGL, inhomogen.

- homogene Form: $y' - y = 0 \iff y' = y$

  allgemeine Lösung: $y(x) = Ae^x$

- inhomogene Form: $y' - y = e^x$

  Ansatz: $y(x) = Be^x \Rightarrow 0 = e^x$ ↯

  neuer Ansatz: $y(x) = Bxe^x$

  $$\Rightarrow y'(x) = Be^x + Bxe^x$$

  $$\Rightarrow y' - y = B\,e^x \overset{!}{=} e^x$$

  $$\Rightarrow B = 1$$

  eine spez. Lsg. der inh. Form: $y(x) = xe^x$

- Allgemeine Lösung der DGL:

  $y(x) = xe^x + Ae^x$

↓

- spez. Lösung zur Anfangsbedingung:

$$4 \overset{!}{=} y(3) = 3e^3 + Ae^3$$

$$\Longrightarrow A = 4e^{-3} - 3$$

10) Ansatz: $y = e^{\lambda x} \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\Longrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-13}$$

$$= 2 \pm 3i$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x}$$

Also immer exponentiell anwachsende Schwingungen.

11) $$-3 + sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \left(\frac{1}{s^2+1} + 3\right) \Big/ (s+2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(s^2+1)(s+2)}}_{\underbrace{\frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C}{s+2}}_{\frac{(A+Bs)(s+2)+C(s^2+1)}{(s^2+1)(s+2)}}} + \frac{3}{s+2}$$

$$\begin{cases} s^2: B + C = 0 \\ s^1: A + 2B = 0 \\ s^0: 2A + C = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{16}{5}e^{-2t}$$

12) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{10+x^2+3x+y^2} \cdot (2x+3) \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \quad \text{"} \quad \cdot \; 2y \overset{!}{=} 0$

$\Longrightarrow x = -\frac{3}{2} \wedge y = 0$

ist einzige Stelle mit horizontaler Tangentialebene.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\cdots} \cdot 2 - \frac{1}{(\cdots)^2} \cdot (2x+3)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\cdots} \cdot 2 - \frac{1}{(\cdots)^2} \cdot 4y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(\cdots)^2} \cdot (2x+3) \cdot 2y$$

An $(x|y) = (-\frac{3}{2}|0)$ ist $\cdots = 10 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 0 = 31/4$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{3}{2}, 0) = \frac{4}{31} \cdot 2 - \cdot 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\tfrac{3}{2}, 0) = \frac{4}{31} \cdot 2 - \cdot 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\tfrac{3}{2}, 0) = - \cdot 0$$

Also ist die Hesse-Matrix an $(-\frac{3}{2}|0)$ gleich

$$\begin{pmatrix} 8/31 & 0 \\ 0 & 8/31 \end{pmatrix}.$$

Det $> 0 \wedge$ links oben $> 0 \Longrightarrow$ lok. Minimum.

((Einfacher: ln ist streng monoton.
Nur $10 + x^2 + 3x + y^2$ betrachten!))