Mathematik 2

2016-04-01

Musterlösungen

1. $$\begin{vmatrix} 2&0&3&0\\ 0&0&2&3\\ 0&1&2&0\\ -1&0&2&0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2&0&3\\ 0&1&2\\ -1&0&2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2&3\\ -1&2 \end{vmatrix}}_{2\cdot 2+1\cdot 3} = 21$$

2. Homogene Form: $y''+y=0$

Ansatz: $y(x)=e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda=\pm i$

allg. Lösung: $y(x)=Ae^{ix}+Be^{-ix}$

Inhomogene Form: $y''+y=\sin(3x)$

Ansatz für spez. Lösung: $y(x)=C\sin(3x)+D\cos(3x)$

$\Rightarrow y''(x)=-9C\sin(3x)-9D\cos(3x)$

$\Rightarrow -8C\sin(3x)-8D\cos(3x)=\sin(3x)$

$\Rightarrow C=-\frac{1}{8},\ D=0$

allg. Lösung:

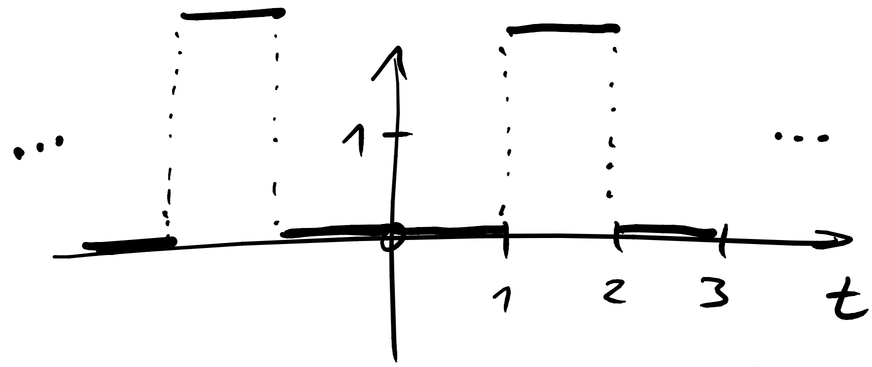
$y(x)=Ae^{ix}+Be^{-ix}-\frac{1}{8}\sin(3x)$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ an $x=8$: $1/2$

$f'(x) = -\frac{1}{3} x^{-4/3}$ $\quad -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}$

$f''(x) = \frac{4}{9} x^{-7/3}$ $\quad \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{128}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8{,}01}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot 0{,}01 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{128} \frac{0{,}01^2}{2}$$

4. 

gerade Funktion $\Rightarrow$ Alle $b=0$.

$$a_5 = \frac{2}{3} \int_0^3 \cos\left(5 \cdot \frac{2\pi t}{3}\right) f(t)\, dt$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_1^2 \cos\left(\frac{10}{3}\pi t\right) dt}_{\left[\frac{3}{10\pi} \sin\left(\frac{10}{3}\pi t\right)\right]_1^2}$$

$$= \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{10}_{5}\pi} \left(\sin\left(\frac{10}{3}\pi \cdot 2\right) - \sin\left(\frac{10}{3}\pi\right)\right)$$

5. $$\frac{s+5}{s^3+2s} = \frac{s+5}{s(s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{s^2+2}$$

$$= \frac{A(s^2+2)+Bs+Cs^2}{s(s^2+2)}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{5}{2},\ B = 1,\ C = -\frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{s+5}{s^3+2s} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1 - \frac{5}{2}s}{s^2+2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{5}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) - \frac{5}{2}\cos(\sqrt{2}t)$$

6. $$f(x,y) = x^2 + xy - 5x + y^2 - 4y + 3$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 5 \overset{!}{=} 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 4 \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{Bmatrix} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{3} = 2 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{3} = 1 \end{cases}$$

Also allenfalls an $(2|1)$ ein lokales Extremum.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

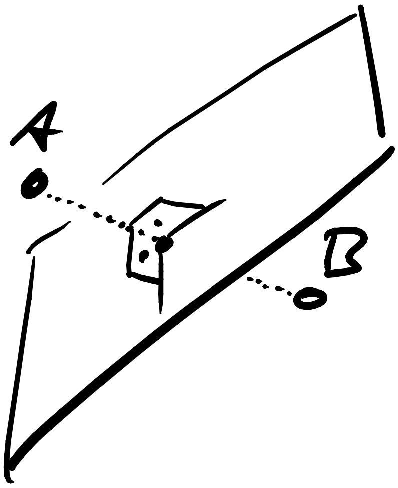
Also Hesse-Matrix überall $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det(\cdot/.) = 3 > 0$, links oben > 0

$\Rightarrow$ zwei positive Eigenwerte

$\Rightarrow$ lokales Minimum an $(2|1)$.

7.



Verbindungsvektor $= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt hat Ortsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren der Ebene müssen $\perp \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Also Ebenengl. z.B.:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Koeffizientenmatrix $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ lin. abhängig!

Spaltenraum $= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

lösbar $\iff \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \lambda \\ 3 = \lambda + \mu \\ 4 = \mu \end{array} \right\} \iff a = -1$$

9. λ ist Eigenwert

$$\iff \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\underbrace{(1-\lambda)(2-\lambda)-a}_{\lambda^2-3\lambda+2-a}} = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{9}{4} - 2 + a}_{\frac{1}{4}+a}}$$

Das ist reell, wenn $a \geq -\frac{1}{4}$.

10. $(y')^2 = \frac{x^2}{y} \Longleftrightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{y}}$

ohne ±, weil x und y der Anfangsbedingung positiv sind

Also $\sqrt{y}\, y' = x$.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_5^{y_1} \sqrt{y}\, dy}_{\left[\frac{2}{3} y^{3/2}\right]_5^{y_1}} = \underbrace{\int_3^{x_1} x\, dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{x_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} y_1^{3/2} - \frac{2}{3} 5^{3/2} = \frac{x_1^2}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow y = \left(5^{3/2} + \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\right)\right)^{2/3}.$$

11. Zum Beispiel eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom gleich $(\lambda-1)(\lambda-2)$ ist. Also z.B. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

12.

$$\text{Integral} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sin(r^2)\, r\, dr \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sin(r^2)\, r\, dr$$

$u = r^2$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^{2^2} \sin(u)\, \frac{du}{2}}_{\frac{1}{2}\left[-\cos(u)\right]_0^4}$$

$$= \pi\left(-\cos(4) - (-\cos(0))\right)$$

$$= \pi\left(1 - \cos(4)\right)$$