Vektoren und Produkte mit Vektoren

Jörn Loviscach

Versionsstand: 22. September 2015, 19:34

1. Skizzieren Sie mit Hilfe von Pfeilen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Skizzieren Sie mit Hilfe von Pfeilen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Schreiben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Summe von Vielfachen der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Kann man den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Summe von Vielfachen der drei Vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schreiben? Und was sagt uns die Antwort auf diese Frage über diese insgesamt vier Vektoren?

5. Beschreiben und begründen Sie, welcher Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und der Länge $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|$ besteht.

6. Ein rechtwinkliges Dreieck in der Ebene oder im Raum hat die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ als Katheten. Schreiben Sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe der Vektorrechnung hin.

7. Zwischen zwei Seiten eines Dreiecks ist dann und nur dann ein rechter Winkel, wenn die Summe der Quadrate der Längen dieser beiden Seiten gleich dem Quadrat der Länge der dritten Seite ist. Zeigen Sie damit und mit Hilfe der vorherigen Aufgaben und mit Hilfe der algebraischen Eigenschaften des Skalarprodukts: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist dann und nur dann null, wenn die beiden Vektoren zueinander senkrecht sind.

8. Es soll das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bestimmt werden. Angenommen, man zerlegt den Vektor $\mathbf{b}$ in einen Anteil $\mathbf{b}_{\parallel}$, der parallel oder antiparallel zu $\mathbf{a}$ ist, und einen Anteil $\mathbf{b}_{\perp}$, der senkrecht zu $\mathbf{a}$ ist. Wie lässt sich damit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ umformen? Und was bedeutet das geometrisch?