# 18
# Kontinuierliche Fourier-Transformation. Laplace-Transformation

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. März 2014, 21:10

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html



Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

## 1 Idee der kontinuierlichen Fourier-Transformation

Die Fourier-Reihe setzt periodische Funktionen aus Gleichspannung, Grundwelle und Oberwellen zusammen. Aber was ist mit nicht-periodischen Funktionen? Es stellt sich heraus, dass man die bilden kann, wenn man beliebige Frequenzen zulässt, nicht nur ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz.

Das kann man als Grenzwert einer Fourier-Reihe mit immer größerer Periode $T$ verstehen. Sei $f$ dazu eine nichtperiodische Funktion, die zum Beispiel stetig differenzierbar ist, um technische Probleme in Weiteren zu vermeiden. Wenn man die komplexe Fourier-Reihe so bildet:

1

erhält man eine Funktion mit Periode $T$. Diese Funktion stimmt für $-T/2 < t < T/2$ mit $f$ überein. (An $t = \pm T/2$ tut sie das wahrscheinlich schon nicht mehr, wegen des da zu erwartenden Sprungs, der von der Fourier-Reihe auf halber Höhe gefüllt wird.)

Wählt man nun die Periode $T$ größer und größer, passt die Fourier-Reihe schließlich für jedes noch so große und noch so kleine $t$. Die Hoffnung ist, dass auch die Einzelteile der Fourier-Reihe für $T \to \infty$ zu etwas Sinnvollem konvergieren. Um das zu sehen, schreibt man nun die Kreisfrequenz $\omega$ statt $2\pi n/T$. Sie läuft in Schritten der Größe $\Delta\omega = 2\pi/T$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Also:

2

Wir untersuchen $T \to \infty$, also $\Delta\omega \to 0$. Das Integral geht gegen

3

– zumindest, wenn die Funktion $f$ so schnell abklingt, dass

4

. Die Kreisfrequenz $\omega$ läuft in immer kleineren Schritten von $2\pi/T$ in Richtung $+\infty$ und in Richtung $-\infty$. Diese Summe wird im Grenzwert ein Integral:

5

Diese Gleichung ist der Schlüssel zur kontinuierlichen Fourier-Transformation [continuous Fourier transform oder nur Fourier transform].

# 2 Kontinuierliche Fourier-Analyse und Synthese

Die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte $\hat{f}$ einer Funktion $f$ (zu Einschränkungen siehe den vorigen Abschnitt) wird definiert durch:

6

Gegeben $\hat{f}$, kann man also die Funktion $f$ wieder zurückerhalten (inverse Fourier-Transformation):

7

Das folgt aus der im vorigen Abschnitt gefundenen Gleichung. Vorsicht mit der Literatur: Der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ wird nicht von allen Autoren per Quadratwurzel zu gleichen Teilen in die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation eingebaut. Dann tauchen hier und da andere Vorfaktoren auf. Und statt $\hat{f}$ mit Hut sieht man auch $\tilde{f}$ mit Tilde.

Anders als die Fourier-Reihe schreibt man die Fourier-Transformation nur selten mit Sinus und Cosinus hin.

Die Fourier-Transformation nimmt ein Signal in Zeitdarstellung und wandelt es in eine Spektraldarstellung = Frequenzdarstellung um (Fourier-Analyse). Die inverse Fourier-Transformation macht das Umgekehrte (Fourier-Synthese). Anders als bei der Fourier-Reihe sehen Analyse und Synthese hier gleichartig aus.

Achtung: Was ein Echtzeit-Spectrum-Analyzer zeigt, ist *nicht* die Fourier-Transformation, sondern immer nur die Fourier-Reihe eines kurzen, weich abgeschnittenen Ausschnitts des Signals, praktisch immer per FFT berechnet.

Man kann die Fourier-Transformation als eine Abbildung von Funktionen auf Funktionen auffassen. Eine herkömmliche Funktion nimmt eine Zahl und liefert eine Zahl zurück. Die Fourier-Transformation nimmt eine Funktion und liefert eine Funktion zurück. (Was wäre eine andere mathematische Operation dieser Art?) Summen von Funktionen bzw. konstante Vielfache von Funktionen werden dabei wieder zu den Summen bzw. Vielfachen der Fourier-Transformierten. Die Fourier-Transformation verhält sich also abstrakt wie eine Matrix („lineare Abbildung“), sogar wie eine Drehung, denn es gilt (Satz von Plancherel; Entsprechendes für die Fourier-Reihe: Satz von Parseval):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega = \quad 8 \quad .$$

Praktisch bedeutet dies, dass man die physikalische Arbeit sowohl in der Zeit- wie auch in der Frequenzdarstellung durch das quadratische Integral bestimmen kann.

# 3 Laplace-Transformation

Die Fourier-Reihe und die Fourier-Transformation zerlegen Schwingungen in sinusförmige Anteile, die sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Das ist für die Physik spannend, für die Regelungstechnik dagegen nicht: In der Regelungstechnik möchte man kurze Störungen und kurze Regelvorgänge betrachten. Dort benutzt man die Laplace-Transformation – und interessiert sich nicht einmal dafür, in *welche* Anteile man die Schwingungen zerlegt. Das Ganze wird im nächsten Skript nur noch ein Trick, um Differentialgleichungen zu lösen.

Man betrachtet bei der Laplace-Transformation Signale $y$ für Zeiten $t \geq 0$. Meist setzt man einfach $y(t) = 0$ für $t < 0$. Der Gedanke ist, dass erst bei $t = 0$ oder später eine Störung auftritt. (Hierfür passen die sinusförmigen Wellen von Fourier nicht gut!)

Die Laplace-Transformierte eines solchen Signals $y$ wird definiert als:

9

Dieses Integral muss nicht für alle komplexen Zahlen $s$ existieren – und wird das meist auch nicht tun. Für Signale $y$, die nur endliche viele Sprungstellen haben und für $t \to \infty$ höchstens exponentiell schnell wachsen, klappt das aber mindestens dann, wenn [10] groß genug ist.

Die Laplace-Transformierte eines Signals $y$ hat verschiedenen Namen:

11

Man sagt, das Signal liegt im „Zeitbereich"; seine Laplace-Transformation liegt im „Bildbereich". In Wolfram Alpha schreibt man zum Beispiel: `laplace transform t^3`

# 4 Laplace-Transformation von Ableitungen

Was passiert, wenn man die Laplace-Transformation auf die Ableitung $\dot{y}$ eines Signals loslässt?

12

Die Ableitung wird also fast ein Produkt, aber nur fast. (Bei Fourier wird sie übrigens exakt ein Produkt, ohne Körnchen Salz.)

Mit dieser Regel kann man nun auch sagen, was mit höheren Ableitungen passiert – zum Beispiel mit der zweiten:

13

# 5 Laplace-Transformation von exp, sin und cos

Das Integral

14

mit einem festem $\lambda \in \mathbb{R}$ kann man billig ausrechnen:

15

Das Integral

16

mit einem festem $\omega \in \mathbb{R}$ geht genauso:

17

Aus dem Realteil liest man ab:

18

Aus dem Imaginärteil liest man ab:

19

# 6 Laplace-Transformation von Potenzfunktionen

Das Integral

20

mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ könnte man langweilig mit partieller Integration lösen. Ein eleganter Trick besteht darin, es mit einer Ableitung zu schreiben:

21

Die Potenzfunktionen mit Exponent $0, 1, 2, 3, \ldots$ haben also diese Laplace-Transformierten:

22

# 7 Verzögerte und zeitskalierte Funktionen

Wenn das Signal $y$ um die Zeit $a$ verzögert wird, ergibt sich als Laplace-Transformierte:

23

Mit der Substitution 24 wird das:

25

Wenn das Signal $y$ um den Faktor $b$ beschleunigt (oder bei $b < 1$ verlangsamt) wird, ergibt sich als Laplace-Transformierte:

26

Mit der Substitution 27 wird das:

28

# 8 Quartett an Transformationen

Damit kennen wir nun die vier wichtigsten Funktionaltransformationen:

29