17
Fourier-Reihe mit Sinus und Cosinus. Fast Fourier Transform

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. März 2014, 21:10

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Fourier-Reihe mit Sinus und Cosinus

Gegeben sei eine reell- oder komplexwertige Funktion f mit Periode T. Dann kann man die in eine komplexe Fourier-Reihe entwickeln:

1

Dabei sind die c_n die komplexen Fourier-Koeffizienten:

2

Das kann man alles mit Sinus und Cosinus umschreiben, indem man die Eulersche Identität anwendet. Dabei ergibt sich die Fourier-Reihe mit Sinus und Cosinus:

3

Nicht wundern: Dass a_0 mit dem Faktor 1/2 steht, macht nachher einige Formeln einfacher. Und Vorsicht mit der Reihenfolge: Die a_n stehen mit dem Cosinus.

Zwei Unterschiede zur komplexen Fourier-Reihe:

- Es tauchen keine negativen Frequenzen mehr auf.
- Die Amplitude und die Phase der n-ten Oberwelle ist nun in a_n und b_n versteckt statt im Betrag und Winkel von c_n.

Ist f eine gerade (und weiterhin periodische!) Funktion, d. h. $f(-t) = f(t)$ für alle t, dann kann offensichtlich kein Sinus vorkommen, also sind alle b_n gleich null. Umgekehrt kann in einer ungeraden Funktion f, d. h. $f(-t) = -f(t)$ für alle t, kein Cosinus vorkommen, also sind alle a_n gleich null.

2 Fourier-Koeffizienten für Sinus und Cosinus

Man könnte aus c_n und c_{-n} die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n bestimmen. Aber es gibt auch einen direkten Weg. Dazu überlegt man sich Folgendes:

$$\int_0^T (\cos(2\pi n t/T))^2 \, dt = \quad {}^{4} \qquad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

denn:

[5]

$$\int_0^T (\sin(2\pi nt/T))^2\,dt = \quad [6] \qquad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

denn:

[7]

$$\int_0^T \sin(2\pi nt/T)\sin(2\pi mt/T)\,dt = \quad [8] \qquad \text{für alle } n, m = 1, 2, 3, \ldots \text{ mit } n \neq m,$$

denn mit zweifacher partieller Integration ergibt sich:

[9]

.

Und entsprechend:

$$\int_0^T \sin(2\pi nt/T)\cos(2\pi mt/T)\,dt = \quad [10] \qquad \text{für alle } n, m = 1, 2, 3, \ldots \text{ mit } n \neq m$$

und das sogar für $n = m$ (einfache partielle Integration) sowie

$$\int_0^T \cos(2\pi nt/T)\cos(2\pi mt/T)\,dt = \quad [11] \qquad \text{für alle } n, m = 1, 2, 3, \ldots \text{ mit } n \neq m.$$

Daran sieht man, dass sich die Sinus- und Cosinus-Funktionen der Fourier-Reihe fast so verhalten wie die Funktionen $t \mapsto e^{2\pi int}$ der komplexen Fourier-Reihe. Sie stehen senkrecht aufeinander und haben alle die gleiche Norm („Länge“).

Wenn man also $f(t)$ mit $\cos(2\pi mt/T)$ integriert ($m = 1, 2, 3, \ldots$), wird man erhalten:

[12]

Also muss für die Fourier-Koeffizienten a_n gelten:

13

Durch den Trick mit dem $\frac{1}{2}a_0$ gilt diese Formel auch für den Gleichspannungsanteil $n = 0$. Entsprechend gibt für die Fourier-Koeffizienten b_n:

14

3 Fast Fourier Transform (FFT)

Typischerweise hat man Signale als Folgen von Messwerten (Samples) gegeben statt als kontinuierliche Funktionen (Demo mit Audacity).

15

Dann lassen sich die Fourier-Koeffizienten mit Summen über die Samples statt mit Integralen berechnen (Diskrete Fourier-Transformation, DFT). Indem man diese Summen geschickt zusammenfasst, kann man die Rechnung beschleunigen (Fast Fourier Transform, FFT). Dies ist die übliche Art, Fourier-Analyse zu betreiben. Dafür stehen auch diverse Programmierbibliotheken bereit, insbesondere FFTW (Link).

DFT/FFT beziehen sich immer nur auf einen endlichen Ausschnitt eines Signals (Demo mit Audacity). Diese Ausschnitte werden weich mit „Fensterfunktionen“ [window functions] aus dem Signal gebildet. Harte Schnitte würden unsinnige Anteile mit hohen Frequenzen in der DFT/FFT erzeugen:

16

MATLAB® beherrscht selbstverständlich FFT und Fensterfunktionen.