9
Lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Jörn Loviscach

Versionsstand: 24. April 2014, 17:47

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Lösung durch Ansatz

Eine Differentialgleichung hat zwei Zutaten: erstens eine Gleichung, in der eine Ableitung einer gesuchten Funktion vorkommt und zweitens einen Startpunkt („Anfangswert“) im Phasenraum. Hier ist eine ganz einfache:

$$y'(x) \stackrel{!}{=} \sin(x) \quad \text{mit} \quad y(3) \stackrel{!}{=} 7$$

Die Lösung kann man finden, indem man die Form der Lösung rät („Ansatz“):

1

Am Ergebnis sieht man schon, warum das Lösen von Differentialgleichungen auch „Integrieren von Differentialgleichungen“ heißt.

Der Ansatz – die kultivierte Art des Ratens – ist beim Lösen vom Differentialgleichungen gang und gäbe. Wenn man eine Lösungsfunktion zum vorgegebenen Anfangswert angeben kann, hat man gewonnen, egal, wie man auf die Lösung gekommen ist. Denn (bis auf pathologische Fälle in der Mathematik) ist die Lösung *eindeutig*.

2 Homogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine nicht mehr ganz triviale Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist:

$$y'(x) + 5y(x) \overset{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad y(3) \overset{!}{=} 7$$

Diese ist homogen. Was wäre hier ein naheliegender Ansatz für die Lösungsfunktion y?

2

Als Lösung ergibt sich damit:

3

Statt die Anfangsbedingung $y(3) \overset{!}{=} 7$ einzusetzen, schreibt man das Ergebnis oft einfacher mit einer „Integrationskonstanten“:

4

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung muss man als Anfangswert die Werte von $y(x_0)$, $y'(x_0)$, … bis $y^{(n-1)}(x_0)$ vorgeben (Startpunkt im Phasenraum!) – oder n unabhängige (!) Integrationskonstanten in der Lösung haben. Diese Lösung mit n Größen zum Einstellen heißt dann die „allgemeine“ Lösung [general solution].

3 Inhomogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Nun eine inhomogene Variante derselben Differentialgleichung:

$$y'(x) + 5y(x) \stackrel{!}{=} x^2$$

Man sucht nun zunächst eine „spezielle“ Lösung [particular solution] dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung, also irgendeine Lösung zu *irgendeinem* Anfangswert. Was wäre dafür ein sinnvoller Ansatz?

5

Um die *allgemeine* Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu finden, addiert man eine spezielle Lösung (wie die eben gefundene) der in[c1]homogenen Differentialgleichung zu einer allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (auch bereits bekannt):

[c1] text added by jl

6

(Der Trick dahinter ist derselbe wie der beim Kern von Matrizen: Man findet alle Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wenn man *eine* Lösung $\mathbf{x}_0$ dieser Gleichung sucht und dazu alle Lösungen der homogenen Variante $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ addiert. Die letzteren Vektoren bilden den Kern der Matrix A.)

4 Variation der Konstanten

Eine andere Art, die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu finden, ist die „Variation der Konstante“: Man setzt die

Integrationskonstante der homogenen Differentialgleichung als Funktion statt als Konstante an:

7

Vorsicht: Dies geht nur bei erster Ordnung.

5 Homogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der Prototyp für *homogene* lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist das Federpendel mit Auslenkung x zur Zeit t, Masse m, Federkonstante D und Reibungskonstante r:

8

Welche Größen muss man als Anfangsbedingung angeben?

9

Bei geringer Reibung zeigt das Federpendel abklingende Schwingungen. Deshalb liegt der Ansatz nahe:

10

Mit Hilfe einer komplexen Zahl λ kann man das kompakter schreiben:

11

Dann muss für λ gelten:

12

Also hat man typischerweise (wenn nicht: siehe weiter hinten) *zwei* verschiedene Lösungen λ. Was passiert, wenn die λ einen imaginären Anteil haben?

13

Was passiert, wenn der Realteil negativ ist?

14

Was, wenn er positiv ist? (Kann das hier passieren?)

15

Die beiden Lösungen der Differentialgleichung zu den beiden λ darf man beliebig zusammenmischen und hat wieder eine Lösung, weil die DGL linear und homogen ist:

16

Damit hat man zwei Integrationskonstanten und so die Möglichkeit, alle erdenklichen Anfangswerte einzustellen, *wenn* die beiden λ verschieden voneinander sind:

17

Wenn zufällig die beiden λ gleich sind (und nur dann!), erhält man eine zweite Lösung der Differentialgleichung mit $t\,e^{\lambda t}$, also die allgemeine Lösung mit:

18

6 Inhomogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichung des Federpendels gibt es auch in einer inhomogenen Variante: Man regt das Pendel mit einer oszillierenden Kraft der Frequenz f und der Amplitude $\hat{F}$ an:

19

Hier wendet man wieder den Trick an, zu der allgemeinen Lösung der homogenen DGL eine spezielle Lösung der in[c1]homogenen DGL zu addieren, um die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu erhalten:

[c1] *text added by jl*

20

Welcher Ansatz liegt für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL nahe?

21