Mathematik 2

2014-02-03

(1)

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 4y + 3z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -1 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 2 & (-2)\cdot \\ 0 & 4 & 3 & 3 & - \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 4 & 3 & 3 & (-4)\cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{3} \end{array} \quad 0 = 3 \; \lightning$$

keine Lösung!

②

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \vec{a}$$

mit $\vec{a} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{9} = \lambda\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{14} + 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = 9/14$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{9}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5/14\\-2/7\\1/14\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9/14\\9/7\\27/14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5/14\\-2/7\\1/14\end{pmatrix}$$

(3) λ Eigenwert

$$\Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 2$$

$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ Eigenvektor

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow v_y = 0$$

Also alle Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$
mit $v_x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(4) $y' = y\cos(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos(x)$

$$\Rightarrow \text{"} \frac{dy}{y} = \cos(x)\,dx \text{"} \Rightarrow \int_4^{y_1} \frac{dy}{y} = \int_3^{x_1} \cos(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln(y_1) - \ln(4) = \sin(x_1) - \sin(3)$$

$$y_1 = \pm e^{\sin(x_1) - \sin(3) + \ln(4)}$$

Bei uns offensichtlich: +

$$= 4\, e^{\sin(x_1) - \sin(3)}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ (\sin(y_2) + 5x)/(1+x^2) \end{pmatrix}$$

(6)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y-2) - \sin(x+y-4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y-2) - \sin(x+y-4)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3|1)} = 2 \cdot 0 - \sin(0) = 0 \checkmark$$

notwendig

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3|1)} = -2 \cdot 0 - \sin(0) = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \cos(x+y-4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - \cos(x+y-4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 - \cos(x+y-4)$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(3|1)} = 2 - \cos(0) = 1$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(3|1)} = 2 - \cos(0) = 1$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(3|1)} = -2 - \cos(0) = -3$$

$\Longrightarrow$ Hesse-Matrix an $(3|1)$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \qquad > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3) = -8 < 0$$

$\Longrightarrow$ ein Eigenwert positiv,
ein Eigenwert negativ ✓

auch hinreichend!

(7) Gesucht ist $(x|y|z)$ mit

$$x^2+y^2+z^2=3^2 \qquad \mathrm{I}$$

$$\wedge\ (x-1)^2+y^2+z^2=3^2 \qquad \mathrm{II}$$

$$\wedge\ (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=3^2 \qquad \mathrm{III}$$

$\mathrm{II}-\mathrm{I}$: $$\underbrace{(x-1)^2-x^2}_{-2x+1}+\ldots=+\ldots$$

$$\Rightarrow -2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\mathrm{III}-\mathrm{II}$: $$\underbrace{(x-2)^2-(x-1)^2}_{\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{\frac{8}{4}=2}}+\underbrace{(y-1)^2-y^2}_{-2y+1}=0$$

$$\Rightarrow -2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{I}: \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{4}_{\,2}}} + z^2 = 9$$

$$\Longrightarrow z^2 = 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\Longrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}$$

((Eigentlich müsste man jetzt noch prüfen, ob das nun wirklich eine Lösung ist. Aber gemäß der Aufgabenstellung ist das klar.))

(8)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}}_{0+0+0-0-0-d\cdot 1\cdot 1} = -d$$

Also muss $d = -42$ sein.
Die Werte von a, b, c sind beliebig.

⑨ $y'' - 6y' + 109y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 109 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{9-109}$

$= 3 \pm 10i$

Allgemeine Lösung also:

$y(x) = Ae^{(3+10i)x} + Be^{(3-10i)x}$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen bis auf $y(x) = 0 \; \forall x$ sind exponentiell anwachsende Schwingungen.

(10) $c_0 = \frac{1}{5}\int_0^1 e^t \, dt = \frac{1}{5}\left[e^t\right]_0^1$

$$= \frac{1}{5}(e-1)$$

$$c_3 = \frac{1}{5}\int_0^1 \underbrace{e^{-2\pi i 3 \frac{t}{5}} e^t}_{e^{\left(-\frac{6}{5}\pi i + 1\right)t}} \, dt$$

$$\left[\frac{e^{\left(-\frac{6}{5}\pi i + 1\right)t}}{-\frac{6}{5}\pi i + 1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\cancel{5}} \; \frac{e^{-\frac{6}{5}\pi i + 1} - 1}{-\frac{6}{\cancel{5}}\pi i + \cancel{1}_{5}}$$

(11) $$\frac{s}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{A+Bs}{s^2+4} + \frac{C}{s+3}$$

$$= \frac{(A+Bs)(s+3)+C(s^2+4)}{(s^2+4)(s+3)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} s^0: & 0 = 3A + 4C & \text{I} \\ s^1: & 1 = A + 3B & \text{II} \\ s^2: & 0 = B + C & \text{III} \end{cases}$$

$\text{III in I} \Longrightarrow 0 = 3A - 4B$

$3 \cdot \text{II} \quad : \quad 3 = 3A + 9B$

Differenz $: -3 = -13B \Longrightarrow B = \frac{3}{13}$

$\Longrightarrow C = -\frac{3}{13} \Longrightarrow A = \frac{\cancel{12}\,4}{\cancel{39}\,13}$

$$\Longrightarrow \frac{s}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{4}{13}\frac{1}{s^2+4} + \frac{3}{13}\frac{s}{s^2+4} - \frac{\frac{3}{13}}{s+3}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{2}{13}\sin(2t) + \frac{3}{13}\cos(2t) - \frac{3}{13}e^{-3t}$$

(12) $1 \overset{!}{=} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{(x^2+y^2)^3}_{(r^2)^3 = r^6} \, d\varphi \right) r \, dr$

$$= 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^R r^7 \, dr}_{\left[\frac{r^8}{8}\right]_0^R}$$

$$= 2\pi \frac{R^8}{8}$$

$$\Rightarrow R^8 = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{2}\pi} \Rightarrow R = \sqrt[8]{\frac{4}{\pi}}$$