Mathematik 2 für Regenerative Energien
Klausur vom 3. Februar 2014

Jörn Loviscach

Versionsstand: 2. Februar 2014, 19:21

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Taschenrechner, kein Computer, kein Handy.

Name	Vorname	Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

Fingerübungen

1. Lösen Sie dieses Gleichungssystem mittels Gaußscher Elimination:
$$\begin{aligned} x - z &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 4y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

2. Zerlegen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in zwei Vektoren: einen, der zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallel ist, und einen, der dazu senkrecht ist.

3. Bestimmen Sie alle Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Lösen Sie $y' \overset{!}{=} y\cos(x)$ zur Anfangsbedingung $y(3) \overset{!}{=} 4$.

5. Wandeln Sie die Differentialgleichung $(1+x^2)\,y'' = \sin(y') + 5x$ in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um. (Eine Lösung ist hier nicht gefragt.)

6. Zeigen Sie: Die Funktion $f(x,y) := (x-y-2)^2 + \cos(x+y-4)$ hat an $(x|y) = (3|1)$ einen Sattelpunkt.

Bitte wenden!

Kreative Anwendung

7. Im $\mathbb{R}^3$ sind drei Kugeln gegeben, alle mit dem Radius 3: Die erste Kugel hat den Mittelpunkt (0|0|0), die zweite Kugel hat den Mittelpunkt (1|0|0), die dritte Kugel den Mittelpunkt (2|1|0). Berechnen Sie die Koordinaten eines Punkts, der auf allen drei Kugeloberflächen liegt.

8. Die folgende Determinante soll gleich 42 sein. Was weiß man dann über die Zahlen a, b, c, und d?
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

9. Wie verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichung $y'' - 6y' + 109y = 0$ für $x \to \infty$? (Schwingend? Abklingend? Aufschaukelnd? Mehreres davon, je nach Anfangsbedingung?)

10. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_0 und c_3 für die Funktion f, welche die Periode 5 hat, für $t \in [0;1)$ gleich e^t ist und für $t \in [1;5)$ gleich 0 ist.

11. Geben Sie die Funktion an, deren Laplace-Transformierte gleich $\frac{s}{(s^2+4)(s+3)}$ ist.

12. Betrachten Sie das Volumen zwischen der Kreisscheibe mit einem zunächst unbekannten Radius R um den Ursprung in der xy-Ebene und der Fläche $z = (x^2 + y^2)^3$. Wie muss der Radius R gewählt werden, damit dieses Volumen gleich 1 ist?