19
Lösung von Differentialgleichungen per Laplace-Transformation

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. März 2012, 16:00

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.j3L7h.de/videos.html

1 Ableitungen in Produkte und Summen verwandeln

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) \stackrel{!}{=} t^2 \quad \text{für } t \geq 0.$$

Was ist das für ein Typ?

1

Als Anfangsbedingung seien $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ gegeben.

Man bildet links und rechts die Laplace-Transformation der Differentialgleichung und erhält:

2

Die verschiedenen Arten von y in dieser Gleichung lassen sich jeweils zusammenfassen:

[3]

Und damit ist aus der Differentialgleichung eine gewöhnliche („algebraische“) Gleichung für die Laplace-Transformierte Y der Lösung geworden.

2 Von der Laplace-Transformation zur Lösung

Diese Gleichung kann man nun nach der Laplace-Transformierten Y auflösen:

[4]

Nebenbei sieht man hier, warum rationale Funktionen irgendwann ein wichtiges Thema werden.

Netterweise ist die Laplace-Transformation eindeutig (mit wenigen Körnchen Salz), will sagen: Es gibt nur eine Funktion, deren Laplace-Transformation dieses Y ist. Wenn man diese Funktion gefunden hat, hat man die Lösung der Differentialgleichung gefunden!

Der Job ist nun also, eine Tabelle mit Laplace-Transformationen rückwärts zu lesen. Unser komplizierter Bruch taucht da aber wahrscheinlich nicht auf. Vielmehr muss man ihn in einfache Teile zerlegen, die man dann tatsächlich in der Tabelle findet. Man beachte: Die Laplace-Transformation ist linear: Summen von Funktionen macht sie zu Summen ihrer Transformierten; ein konstantes Vielfaches einer Funktion macht sie zu diesem Vielfachen deren Transformierter.

Um die rationale Funktion aus einfachen Teilen zusammenzusetzen, ist eine Partialbruchzerlegung angesagt. Zuerst sorgt man dafür, dass im Zähler und im Nenner Polynome in s stehen:

5

Der Nenner lässt sich als $s^3(s+3)(s+2)$ schreiben. (Nullstellen! Polynomdivision!) Als Partialbruchzerlegung ergibt sich dann nach einiger Rechnung oder mit Wolfram Alpha:

$$\cdots = \frac{1}{3s^3} - \frac{5}{18s^2} + \frac{19}{108s} + \frac{-\dot{y}(0) - 2y(0) + 2/27}{s+3} + \frac{\dot{y}(0) + 3y(0) - 1/4}{s+2}$$

Für jeden der fünf Teile schlägt man nach, welche Funktion hier jeweils transformiert wurde. Damit hat man die Lösung der Differentialgleichung gefunden:

6