22
Fehlerfortpflanzung und Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. März 2012, 16:33

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.j3L7h.de/videos.html

1 Fehlerfortpflanzung: Größtfehler

Angenommen, wir wissen, dass der Wert der Größe x gleich $x_0 = 5{,}0$ mit einem absoluten Größtfehler von 0,2 ist und der Wert der Größe y gleich $y_0 = 3{,}0$ mit einem absoluten Größtfehler von 0,3 ist. In welchem Bereich liegt dann der Wert der Funktion $f(x,y) := x/(1+y^2)$? Grafisch:

1

Hier kann man mehr oder minder komplex über den Verlauf der Funktion nachdenken und zum Beispiel mit Monotonie argumentieren – oder aber einfach statt der Funktion ihre Tangentialebene untersuchen. Vorsicht: Das ist nicht exakt! Man muss sich überzeugen, dass die Tangentialebene dicht genug an der Funktion liegt.

Die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle (5|3) ist:

2

Daran kann man sofort den möglichen Bereich des Ergebnisses ablesen:

3

Das Rezept ist also:

4

2 Fehlerfortpflanzung: Standardabweichung

Angenommen, wir kennen vom Wert der Größe x den Erwartungswert $x_0 = 5{,}0$ und die Standardabweichung $\sigma_x = 0{,}1$ und vom Wert der Größe y den Erwartungswert $y_0 = 3{,}0$ und die Standardabweichung $\sigma_y = 0{,}2$. Was sind dann der Erwartungwert und die Standardabweichung der Funktion $f(x, y) := x/(1 + y^2)$? Grafisch:

5

Angenommen, man kann die Funktion gut genug durch die Tangentialebene nähern, *und* angenommen, die Abweichungen von x und y sind unkorreliert, dann gilt für den Erwartungswert $E[f]$ der Funktion f:

6

Und für die Varianz $\sigma_f^2 = E[(f - E[f])^2] = E[f^2] - (E[f])^2$ des Funktionswerts:

7

Das Rezept ist also:

8

3 Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher

Wie bei Funktionen von einer Veränderlichen untersucht man Stellen im Inneren des Definitionsbereichs, an denen der Funktionswert entweder größer oder aber kleiner ist als alle Funktionswerte in einer Umgebung: *lokale* Maxima und Minima (Sammelbegriff: Extrema). Der insgesamt größte oder kleinste Funktionswert heißt das *globale* Maxiumum oder Minimum. Wenn der existiert (Was nicht sein muss!), wird er ein solches lokales Maxiumum oder Minimum sein oder aber am Rand des Definitionsbereichs liegen. Man hat also eine hoffentlich überschaubare

Sammlung an Funktionswerten, von denen man dann zu Fuß den größten bzw. den kleinsten suchen kann.

Zum Finden von lokalen Extrema kann man Ableitungen benutzen. Damit an einer Stelle $(x_0|y_0)$ im Inneren des Definitionsbereichs ein lokales Extremum liegen kann, muss gelten (notwendige Bedingung):

9

Diese Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend, wie diese geometrischen Situationen zeigen:

10

Meist – aber nicht immer – kann man die Lage mit der zweiten Ableitung aufklären. Im ersten Semester, bei Funktionen *einer* Veränderlichen, kam es auf das Vorzeichen der zweiten Ableitung an. Nun dagegen, mit zwei Veränderlichen, kann man untersuchen, ob sich die Funktion in jede Richtung nach unten oder nach oben oder mal so und mal so von der Tangentialebene wegkrümmt. Dazu bildet man die Matrix mit den Werten aller doppelten partiellen Ableitungen an $(x_0|y_0)$, die sogenannte Hesse-Matrix:

11

Diese Matrix ist immer symmetrisch. Wenn alle Eigenwerte dieser Matrix positiv sind, krümmt sich die Funktion an $(x_0|y_0)$ nach oben von der Tangentialebene weg. Wenn alle Eigenwerte negativ sind, krümmt sich die Funktion nach unten weg. In allen übrigen Fällen (Eigenwerte null oder gemischt positiv und negativ) kann man so noch nichts Genaues sagen.

Die Begründung dafür liegt im dem Taylor-Polynom zweiten Grades. Das sieht mit zwei Veränderlichen so aus:

12

Der quadratische Term hinten (Sehen Sie die Quadrierung?) bestimmt, wie sich die Funktion an die Tangentialebene schmiegt.

Für zwei Veränderliche gibt ein billiges Rezept, um die Vorzeichen der Eigenwerte ohne große Rechnung zu prüfen: Eine symmetrische 2×2-Matrix hat genau dann Eigenwerte, die beide positiv oder aber beide negativ sind, wenn die Determinante der Matrix 13 ist. Ist das der Fall, entscheidet das Vorzeichen des linken oberen Eintrags der Matrix, ob beide Eigenwerte positiv oder aber negativ sind.

Das Prüfen auf ein lokales Maximum an $(x_0|y_0)$ sieht also als Rezept so aus:

14

Was ändert sich, wenn man statt dessen auf ein lokales Minimum prüft?