8
Dynamische Systeme

Jörn Loviscach

Versionsstand: 20. März 2012, 16:01

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.j3L7h.de/videos.html

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

1 Begriff und Anwendung

Dynamische Systeme [dynamical systems] modellieren zeitliche Entwicklungen und Regelungsprozesse – in der Physik, der Elektrotechnik, der Automatisierungstechnik, der Klimaforschung ebenso wie der Volkswirtschaft. Typischerweise leistet der Zufall seinen Beitrag, zum Beispiel durch Messungenauigkeiten oder durch quantenmechanische Effekte. Aber oft kann man den Zufall weitgehend ignorieren und sich nur mit *deterministischen* dynamischen Systemen befassen. Nur um diese soll es hier gehen.

Zu einem dynamischen System gehören zwei Zutaten:

1. Zustände [states]: Zu jedem Zeitpunkt ist das dynamische System in einem bestimmten Zustand. Der aktuelle Zustand umfasst dabei alles, was die zukünftige Entwicklung bestimmt. Beispiel: Was benötigt man, um den Zustand einer Kegelbahn mit neun Kegeln und einer Kugel zu beschreiben?

   1

   Die Menge aller denkbaren Zustände heißt Zustandsraum [state space] oder auch Phasenraum [phase space]. Als Zustandsraum der Kegelbahn kann man also benutzen:

   2

2. Entwicklungsgesetz: Es gibt eine Regel, die eindeutig festlegt, (deshalb „deterministisch“) wie sich der Zustand von einem Zeitpunkt zum nächsten entwickelt.

Je nach Art des Zustandsraums und des Entwicklungsgesetzes kann man verschiedene Fälle unterscheiden. Beispiele:

	diskreter Zustandsraum	kontinuierlicher Zustandsraum
zeitdiskret	[3]	[4]
zeitkontinuierlich	[5]	[6]

2 Ein einfaches dynamisches System

Schon einfache dynamische Systeme zeigen überraschende Phänomene. Beispiel: die „logistische Gleichung“ [logistic map] zu einer fest vorgegebenen Wachstumsrate k, ein zeitdiskretes System. Der Zustandsraum ist hier das Zahlenintervall $x \in [0,1]$. In jedem Zeitschritt wird die Funktion $x \mapsto kx(1-x)$ angewendet. Man kann sich das so vorstellen, dass x die Größe einer Bevölkerung misst. Nach einmaligem Anwenden der Funktion ergibt sich die Größe der Bevölkerung in der nächsten Generation. $x = 1$ ist die Maximalgröße der Bevölkerung, denn was passiert dort? Und was passiert, wenn die Bevölkerung sehr dicht an 0 ist?

Je nachdem, welche Werte man für die Wachstumsrate k einsetzt, verhält sich das System verschieden. Beispiele (Demo mit OpenOffice.org):

- $k = 0{,}9$ [7]
- $k = 1{,}1$ [8]
- $k = 3{,}2$ [9]
- $k = 3{,}5$ [10]
- $k = 3{,}55$ [11]
- $k = 4{,}0$ [12]

Das Streben zu einem Gleichgewichtszustand und das Einsetzen von Schwingungen findet man auch in vielen alltäglichen Systemen. Ein weiteres Phänomen, das allerdings an der logistischen Gleichung noch nicht sichtbar ist, ist die Resonanzkatastrophe: das praktisch unendliche Aufschaukeln von Schwingungen.

Die logistische Gleichung zeigt aber für $k = 4$ perfekt ein anderes Phänomen, das sonst erst bei komplizierten Systemen auftritt: deterministisches Chaos. Dieser etwas blumige Begriff bezeichnet, dass winzige Unterschiede im Anfangszustand nach wenigen Schritten deutliche Auswirkungen haben (exponentielles Fehlerwachstum; Demo mit OpenOffice.org). Dass die Folge der Zustände des Systems fast gewürfelt aussieht, ist nur eine Konsequenz davon.

3 Typen von Differentialgleichungen

Zeitkontinuierliche dynamische Systeme werden typischerweise mit Differentialgleichungen beschrieben. Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine Ableitung oder mehrere Ableitungen einer Funktion und ggf. die Funktion selbst und die Unabhängige auftreten. Gesucht ist die Funktion, also nicht nur ein einziger Wert:

13

Die Ordnung [order] einer Differentialgleichung gibt an, was die höchste Ableitung ist, die in der Differentialgleichung vorkommt:

14

In einer expliziten Differentialgleichung steht die höchste Ableitung nackt auf einer Seite und kommt ansonsten nicht vor:

15

Bei einer impliziten Differentialgleichung ist das gerade nicht der Fall:

16

In einer linearen Differentialgleichung (Gegenteil: nichtlinear [non-linear]) tritt nur eine Summe von Vielfachen der Funktion und ihrer Ableitungen auf. Diese Vielfachen dürfen allerdings Funktionen der Unabhängigen sein:

17

Falls diese Vielfachen nicht Funktionen, sondern Konstanten sind, hat man eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Inhomogenität darf dabei aber weiter eine Funktion sein:

18

Gibt es mehrere Unabhängige, leitet man getrennt nach denen ab (partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, kommen später dran). Differentialgleichungen solchen Typs heißen partielle Differentialgleichungen:

19

Die Differentialgleichungen, in denen nur nach einer Unabhängigen abgeleitet wird, heißen dagegen „gewöhnliche Differentialgleichungen“ [ordinary differential equations]. Nur um solche wird es hier gehen.

4 Vektorfelder und Lösungskurve

Beispiel: die Differentialgleichung des Federpendels mit Masse m, Federkonstante D, Reibungskonstante r, Position x gemessen ab der Ruhelage und Impuls $p = mv$:

20

Durch welche Angaben lässt sich der Zustand zu jeder Zeit beschreiben? Was sollte also der Zustandsraum = Phasenraum sein?

21

Die Differentialgleichung lässt sich so umformen, dass man sieht, wie sich der Zustand zeitlich entwickelt:

22

Das kann man als Vektorfeld aufmalen:

23

Verbindet man die nacheinander im Phasenraum erreichten Zustände, ergibt sich eine Lösungskurve.

Offensichtlich ist es so, dass, wenn man einen Punkt im Phasenraum als Anfangszustand („Anfangsbedingung“) vorgibt, man den Zustand zu beliebigen Zeitpunkten danach vorhersagen kann. Interessanterweise geht das auch rückwärts: Man kann auch sagen, was der Zustand zu beliebigen Zeiten vorher war. Zu jeder gegebenen Anfangsbedingung $x(t_0)$, $p(t_0)$ existiert also eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (das heißt: eine passende Funktion $(x(t), p(t))$).

Diese Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu jeder Anfangsbedingung ist mathematisch nicht ganz trivial. Sie gilt auch nicht immer: Der Zustand kann zu endlicher Zeit ins Unendliche entweichen oder in eine Definitionslücke einer Funktion, die in der Differentialgleichung vorkommt. Theoretisch könnte es auch andere Probleme geben: Erstens könnte eine Funktionen, die in der Differentialgleichung vorkommt, zu rau sein, so dass sich vielleicht gar keine Lösung finden lässt. Zweitens könnte eine Funktion, die in der Differentialgleichung vorkommt, zu steil sein, so dass die Lösung verzweigen kann und damit nicht eindeutig ist. Ein Beispiel für Letzteres ist die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y(x)|}.$$

Zum Anfangswert $x(0) \stackrel{!}{=} 0$ hat diese Differentialgleichung unendlich viele Lösungen. Eine davon ist, dass $y(x)$ dauerhaft 0 ist. Eine andere Lösung verzweigt daraus ab $x = 0$ für $x \geq 0$ in $y(x) = \frac{1}{4}x^2$. In der Praxis erlebt man so etwas höchst selten. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen sind dort typischerweise anschaulich klar.