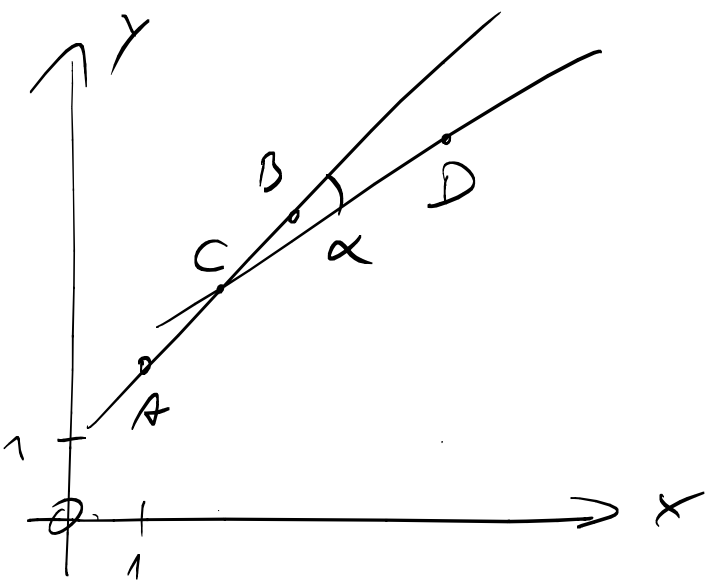
Mathematik II

2012-09-19

---

1) 

$\overline{AB}$: Richtungsvektor $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\overline{CD}$: Richtungsvektor $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{10} = \underbrace{\left\|\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\|}_{\sqrt{8}}\cdot\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\|}_{\sqrt{13}}\cdot\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{10}{\sqrt{8\cdot 13}} \quad \left(\left(\approx 11°\right)\right)$$

2) $0 = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-6 = 4-5\lambda+\lambda^2-6$

$= \lambda^2-5\lambda-2$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+2} = \frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$$

$\downarrow$

E.V. zu $\oplus$ muss erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right) & 2 \\ 3 & 4-\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wähle z.B. $x = 2$ und $y = \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2} - 1$
$= \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}$

3) homogene Form: $y'' + 2y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}\,i$

$\Rightarrow$ Allg. Lsg. der inhomogenen Form

$= A e^{\sqrt{2} i x} + B e^{-\sqrt{2} i x}$

inhomogene Form: $y'' + 2y = 1$

Spezielle Lsg. offensichtlich z.B. $y = \frac{1}{2}$

Allg. Lsg.: $y = A e^{\sqrt{2} i x} + B e^{-\sqrt{2} i x} + \frac{1}{2}$

4) $y' = \sqrt{x(y+1)} \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{y+1}} = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_5^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y+1}}}_{\left[2\sqrt{y+1}\right]_5^{y_1}} = \underbrace{\int_2^{x_1} \sqrt{x}\,dx}_{\left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3\right]_2^{x_1}}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\sqrt{y_1+1} - \cancel{2}\sqrt{6} = \frac{\cancel{2}}{3}\sqrt{x_1}^3 - \frac{\cancel{2}}{3}\sqrt{2}^3$$

$$\Rightarrow y_1 = -1 + \left(\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{x_1}^3 - \frac{1}{3}\sqrt{2}^3\right)^2$$

5) $$\frac{s-1}{\underbrace{s^3+s}_{s(s^2+1)}} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(B+Cs)s}{s(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow s-1 = A(s^2+1) + (B+Cs)s$$
$$= (A+C)s^2 + Bs + A$$

$$\Rightarrow A = -1,\ B = 1,\ C = -A = 1$$

$$\Rightarrow \frac{s-1}{s^3+s} = -\frac{1}{s} + \frac{1+s}{s^2+1}$$
$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

Also Original function:

$$= -1 + \cos(t) + \sin(t)$$

6) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 6 \overset{!}{=} 0 \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y^2 + 2y - 3 \overset{!}{=} 0 \qquad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I}:\ 3y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\mathrm{I}:\ x = -y - 3 \Leftrightarrow x = \mp\sqrt{3} - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

Hesse-Matrix: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6\cdot(\pm\sqrt{3}) + 2 \end{pmatrix}$

det %. $= \pm 12\sqrt{3} \cancel{+4} \cancel{-4}$

> 0 für $\oplus$, aber < 0 für $\ominus$

lok. Min oder Max.
links oben steht $2 > 0$,
also lok. Min.

Sattel

7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = Drehung um $+90°$ um 0

Nehme z.B. M = Drehung um $+45°$ um 0
$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

((oder Gleichungssystem aufstellen))

8) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Entwickeln nach letzter Spalte

$$\iff 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + a + 0 - 0 - 0 - 2$$

$$\iff a = 2$$

9)
$$f(x) = \sin(3 - \sqrt{x})$$
$$f'(x) = \cos(3-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$f''(x) = -\sin(3-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \cos(3-\sqrt{x}) \frac{1}{4\sqrt{x}^3}$$

an $x_0 = 9$

$$0$$
$$1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$0 + 1 \cdot \frac{1}{4 \cdot 27} = \frac{1}{108}$$

Also $f(9{,}01)$

$$\approx 0 - \frac{1}{6} \cdot 0{,}01 + \frac{1}{108} \frac{0{,}01^2}{2}$$

10) $y''' + y' = 0$ linear, homogen, konstante Koeffizienten

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^3 + \lambda}_{\lambda(\lambda^2+1)} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \lor \lambda = \pm i$$

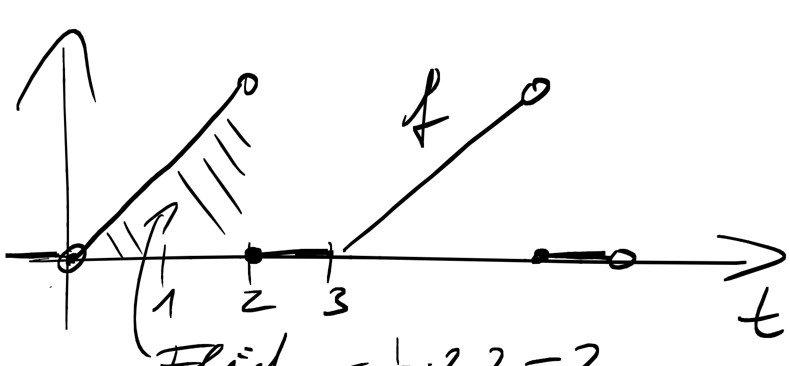
Allgemeine Lösung: $y(x) = A\underbrace{e^{0x}}_{1} + Be^{ix} + Ce^{-ix}$

Nein, gehen nicht alle $\to 0$.
((Sogar alle bis auf eine gehen nicht $\to 0$, nämlich die mit $A = B = C = 0$.))

Begründung: Wähle z.B. $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$.

((Noch kürzere Begründung, ohne jede Rechnung: $y = 42$ ist eine Lösung, geht aber nicht $\to 0$.))

11)



Fläche $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

$c_0 =$ DC-Wert $= \frac{2}{3}$ ((oder per Integral))

$$c_5 = \frac{1}{3}\int_0^2 e^{-2\pi i 5t/3}\, t\, dt$$

$$\frac{e^{-2\pi i 5t/3}}{-2\pi i\, 5/3} \qquad 1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[\frac{e^{-2\pi i 5t/3}}{-2\pi i\, 5/3}\cdot t\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{-2\pi i 5t/3}}{-2\pi i\, 5/3}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-2\pi i\, 10/3}}{-\cancel{4}\pi i\, 5/3}\cdot \cancel{2} - \left[\frac{e^{-2\pi i 5t/3}}{(-2\pi i\, 5/3)^2}\right]_0^2\right)$$

$$= i\,\frac{e^{-20/3\cdot\pi i}}{5\pi}\ \cancel{-}\ + \ \frac{e^{-20/3\cdot\pi i}-1}{\cancel{3}\cdot 4\cdot\pi^2\cdot\cancel{(-1)}\cdot 5^2/3^2}$$

12) $z = \sqrt{r^2+3}$

$$V = \int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\int_0^4 \sqrt{r^2+3}\, r\, dr}_{u = r^2,\ du = 2r\,dr}\right) d\varphi$$

$$\int_0^{16}\sqrt{u+3}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(u+3)^{3/2}\right]_0^{16}$$

$$= 8\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{2}{3}\left(19^{3/2} - 3^{3/2}\right).$$