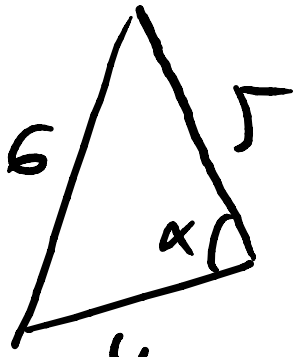
Mathematik 1
2012-07-04
Musterlösungen

1. $\dots \Leftrightarrow 5^{x+2} + 1 = 8$

$\Leftrightarrow x+2 = \log_5(7)$

$\Leftrightarrow x = \log_5(7) - 2$

2.



$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{25+16-36}{40}$

$= \arccos \frac{5}{8}$

einderig!

Fläche $= \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \cdot \sin\alpha$

$= 10 \cdot \sin \arccos \frac{1}{8}$

$\left(= 10 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} \right)$

3. $\underbrace{z^4 - iz^2}_{z^2(z^2-i)} = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$

$\vee\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

$\vee\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

((Wurde aus i, z.B. über Länge und Winkel))

4. Ableitung =

$$\exp(\cdot) \cdot \frac{\sqrt{x}\cos(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x)}{x}$$

5. $\int_3^5 x^2 \ln(x)\, dx$

$\uparrow$ $\downarrow$

$\frac{x^3}{3}$ $\frac{1}{x}$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_3^5 - \underbrace{\int_3^5 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx}_{\left[\frac{x^3}{9}\right]_3^5}$$

$$= \frac{125}{3}\ln(5) - 9\ln(3)$$

$-125/9 + 3$

6. Binomialverteilung:

$$P = \underbrace{\binom{100.000}{0}}_{1} \cdot \underbrace{(10^{-6})^0}_{1} \underbrace{(1-10^{-6})^{100.000}}_{\approx e^{-1/10} \approx \frac{9}{10}}$$

oder Poisson-Verteilung

$$P = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \quad \text{mit } \lambda = 10^{-6} \cdot 100.000 = 0{,}1$$

$$= e^{-0{,}1} \quad (\approx 9/10)$$

7. Ansatz: $N(t) = 1000\, e^{At}$

$$\Rightarrow 10000 = 1000\, e^{A \cdot 24h}$$

$$\Rightarrow A \cdot 24h = \ln(10)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{24h} \cdot \ln(10)$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \cdot e^{\ln(10) \cdot \frac{t}{24h}}$$

$$= 1000 \cdot 10^{t/24h}$$

↓ ↑

└ Hätte man auch gleich draufkommen können!

$$\Rightarrow N(1h) = 1000 \cdot 10^{1/24}$$

$$(\!(\approx 1101)\!)$$

8. $\dfrac{x+1}{x^2+x^3} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{x+1}}}{x^2\cancel{(x+1)}} = \dfrac{1}{x^2}$

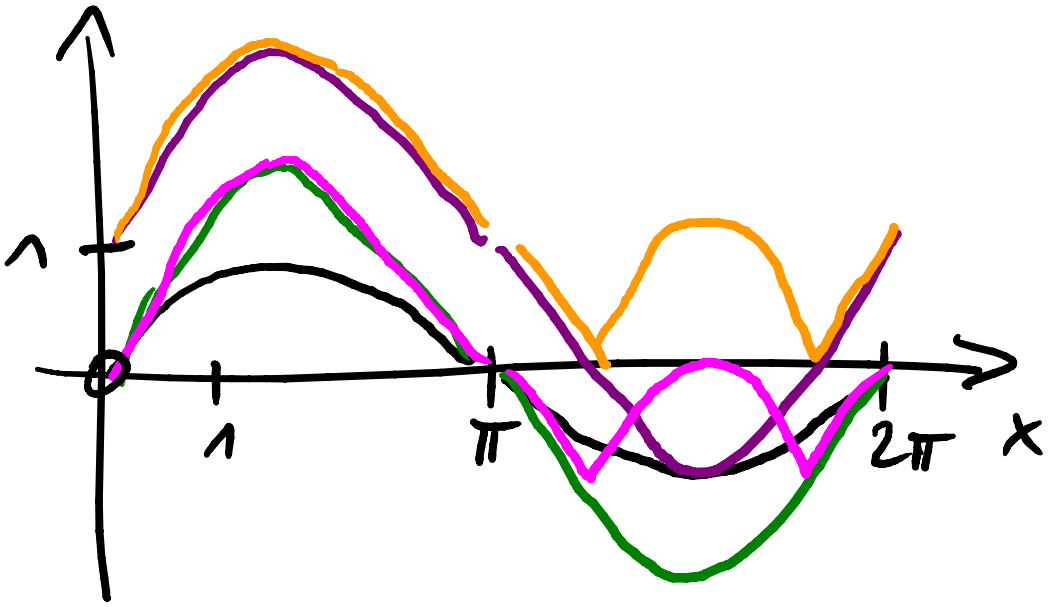
Fertig!

((Oder anfwendig:

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$\ldots \Rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = 0 \;))$$

9.



$\sin(x)$

$2\sin(x)$

$2\sin(x)+1$

$|2\sin(x)+1|$

$|2\sin(x)+1|-1$

10. $|x| \geq (x+1)^2$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \wedge x \geq (x+1)^2$

$\quad \vee\ x < 0 \wedge -x \geq \underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1}$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \wedge 0 \geq x^2 + x + 1$

$\quad \vee\ x < 0 \wedge 0 \geq x^2 + 3x + 1$

↓

Nebenrechnung:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 \text{ ist immer } > 0$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{9}{4} - 1}}_{\sqrt{5}/2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 \leq 0$$

für $\underbrace{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$

$$\Leftrightarrow x < 0 \wedge \lightning$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} ; \underbrace{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}_{\text{Denn dies ist offensichtlich } < 0} \right]$$

11. $P(X=0) = \frac{1}{8}$ zzz

$P(X=1) = \frac{3}{8}$ zzk usw.

$P(X=2) = \frac{3}{8}$ zkk usw.

$P(X=3) = \frac{1}{8}$ kkk

$E[X] = \frac{3}{2}$ (offensichtlich oder $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$)

$E[X^2] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8}$

$= \frac{3+12+9}{8} = \frac{24}{8} = 3$

$\sigma = \sqrt{3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $$\frac{\sqrt{e^{-n} + 2n^4 + n^3}}{n + \sqrt{n^2 + 7}\,\operatorname{sh}(n)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{e^{-n}}{n^4} + 2 + \frac{4}{n}}}{\frac{1}{n} + 5 + \frac{2}{n^2}\operatorname{sh}(n)} \to \frac{\sqrt{2}}{5}$$

0 0 0 0