8
Relationen, Umkehrung

Jörn Loviscach

Versionsstand: 2. Dezember 2011, 16:27

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.j3L7h.de/videos.html

1 Kartesisches Produkt

Für zwei Mengen A und B ist das kartesische Produkt [cartesian product] $A \times B$ definiert als die Menge aller geordneten Paare $(a|b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Beispiel: $\{\circ, \square, \triangle\} \times \{3; 7\} =$

1

„Geordnetes Paar“ heißt:

2

Zur Erinnerung, wie es bei Mengen ist:

3

Wie viele Elemente hat das kartesische Produkt $A \times B$?

4

Man kann auch das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst bilden. Der klassische Fall davon ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =$

5

Diese Menge wird üblicherweise $\mathbb{R}^2$ genannt, sprich „er zwei“. Man fasst sie gerne auf als die Menge aller Punkte in der (euklidischen) Ebene:

6

2 Geordnete Tupel

Das kartesische Produkt kann man weiter treiben: Multipliziert man drei Mengen, soll das die Menge aller geordneten Tripel [ordered triples] bedeuten: $\{\circ, \square, \triangle\} \times \{3; 7\} \times \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} =$

7

Der klassische Fall davon ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} =$

8

Diese Menge wird üblicherweise $\mathbb{R}^3$ genannt, sprich „er drei“. Man fasst sie gerne auf als die Menge aller Punkte im (euklidischen) Raum:

9

Entsprechend kann man das kartesische Produkt von 4 oder 98 oder $n \in \mathbb{N}^+$ vielen Mengen bilden. Die enthalten dann geordnete Quadrupel, geordnete 98-Tupel beziehungsweise geordnete n-Tupel [ordered n-tuples]. Der Zusatz „geordnet“ wird oft weggelassen.

Die gängigen Programmiersprachen sehen Datentypen für geordnete Tupel vor. Einem geordneten Tripel reeller Zahlen entspricht zum Beispiel in Java das Array `double[] a = new double[3];` Seine drei Einträge werden mit `a[0]`, `a[1]` und `a[2]` angesprochen. Tupel mit verschiedenartigen Einträgen kann man in Java als „Klassen“ bauen wie:

```
class Einwohner
{
    string name;
    int alter;
    string wohnort;
}
```

(Man würde allerdings meist jeder der drei inneren Zeilen noch ein `private` voranstellen und noch viele weitere Sachen dazu schreiben. Nächstes Jahr mehr dazu.)

3 Begriff Relation

Eine beliebige Teilmenge eines kartesischen Produkts von n Mengen heißt n-stellige Relation. Dies hier sind zum Beispiel Relationen:

10

und

11

Was könnte jeweils das kartesische Produkt gewesen sein?

12

und

13

Das zweite Beispiel lässt man die wesentliche Bedeutung von Relationen in der Informatik ahnen: Sie dienen als Datenspeicher.

4 Vorstellungen

Es gibt mehre übliche Vorstellungen von Relationen. Hier sind drei davon.

Vorstellung 1: Tabelle. Fast alle aktuell (noch?) üblichen Datenbanksysteme verwalten Tabellen. Mathematische Relation sind nichts anderes als Tabellen mit ein paar Besonderheiten. Deshalb heißen diese Datenbanksysteme auch „relational“.

14

In jeder Spalte der Tabelle dürfen nur Einträge aus der jeweiligen Menge des kartesischen Produkts stehen. Die Reihenfolge der Zeilen ist egal. Keine Zeile darf als Ganzes doppelt vorkommen; Teile der Zeile dürfen sich aber wiederholen.

Unterschied zu Abbildungen/Funktionen: Dort gibt es nur zwei Spalten. Außerdem muss in der linken Spalte jedes Elemente der Definitionsmenge vorkommen – und das genau einmal.

Vorstellung 2: Liniendiagramm:

15

Elemente der Mengen aus dem Produkt sind durch Linien verbunden. Jede Linie geht durch genau ein Element aus jeder Menge des kartesischen Produkts. Linien dürfen teilweise übereinander liegen. Keine Linien dürfen aber komplett übereinstimmen.

Unterschied zu Abbildungen/Funktionen: Man malt typischerweise Pfeile statt Linien. Nur zwei Mengen sind beteiligt. Von jedem Element in der Definitionsmenge muss genau ein Pfeil ausgehen.

Vorstellung 3: Geometrische Objekte im $\mathbb{R}^n$:

16

Eine n-stellige Relation zwischen reellen Zahlen ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also eine Menge von Punkten. Umgekehrt ist jedes auch noch so komische geometrische Objekt eine Relation! Beispiele: Die Kleiner-Relation ist in Formeln geschrieben:

17

Oder als Bild:

18

Ebenso ist die liegende Parabel $x = y^2$ eine Relation. In Formeln:

19

Im Bild:

20

Unterschied zu Funktionen: Ein Funktionsgraph muss jedem x aus der Definitionsmenge genau ein y (nicht null, nicht zwei oder mehr) aus dem Wertevorrat zuordnen.

5 Idee der Umkehrabbildung/Umkehrfunktion

Um eine Gleichung wie $a + 3 = 5$ nach a aufzulösen, wendet man (streng genommen) auf beide Seiten eine Abbildung/Funktion an:

21

Ebenso, um $e^b = 7$ nach b aufzulösen:

22

Man sucht also Abbildungen/Funktionen, welche die ursprünglichen Funktionen wieder aufheben – sie umkehren:

23

Stellt man sich eine Abbildung/Funktion als Tabelle vor, ist also eine Tabelle rückwärts gesucht, sozusagen ein Telefonbuch, in dem nicht die Namen mit den dazugehörigen Telefonnummern aufgelistet sind, sondern ein Telefonbuch, in dem die Nummern mit den dazugehörigen Namen aufgelistet sind. (Ein Telefonbuch braucht allerdings streng mathematisch keine Abbildung zu sein. Warum?)

6 Definition der Umkehrbarkeit

Hat man eine Abbildung/Funktion $f : D \to W$, dann kann man sich die als Tabelle mit zwei Spalten vorstellen und einfach die beiden Spalten vertauschen, also y aus x machen und umgekehrt. Das ergibt in jedem Fall eine Relation: Die Menge der geordneten Paare ist eine Teilmenge von $W \times D$.

Die große Frage ist nun, ob diese Relation auch eine Abbildung/Funktion ist. Dazu müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

24

Ist beides der Fall, heißt die originale Abbildung/Funktion f „umkehrbar" [invertible]; man kann dann die Tabelle von f rückwärts lesen und erhält wieder eine Abbildung/Funktion: die Umkehrabbildung/Umkehrfunktion [inverse mapping / inverse function] $f^{-1} : W \to D$. Definitionsmenge und Wertevorrat sind gegenüber der Originalfunktion $f : D \to W$ vertauscht.

Achtung: Das $^{-1}$ an dem Namen der Abbildung/Funktion hat nicht (direkt) etwas mit dem Kehrwert zu tun. Dies ist nur wieder ein mathematisches Wortspiel. Später heißt f^{42}, die Abbildung/Funktion f 42-mal anzuwenden: $f^{42}(x) = f(f(\cdots 42\text{-mal} \cdots f(x)\cdots))$. Das $^{-1}$ passt in dieses Spiel. Was wird f^0 sein?

25

Was passiert, wenn man erst die Funktion f anwendet und dann auf das Resultat davon die dazugehörige Umkehrfunktion f^{-1} anwendet?

26

Was passiert, wenn man erst die Umkehrfunktion f^{-1} anwendet und dann auf das Resultat davon die dazugehörige Funktion f anwendet?

27

7 Kritieren zur Umkehrbarkeit

Die wesentliche Bedingung dafür, dass eine Abbildung/Funktion $f : D \to W$ umkehrbar ist, ist:

28

Diese Eigenschaft heißt professionell „Injektivität". Streng mathematisch ist ein wenig mehr nötig: Die Bildmenge von f muss den Wertevorrat W ausschöpfen:

29

. Diese Eigenschaft heißt professionell „Surjektivität". Beides zusammen – Injektivität und Surjektivität – macht die Umkehrbarkeit aus, auch „Bijektivität" genannt.

In der praktischen Ingenieurmathematik kümmert man sich wenig um die Surjektivität. Denn ist eine Abbildung/Funktion injektiv, aber nicht surjektiv, kann man diesen Mangel leicht heilen. Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto e^x$.

30

Die meisten umkehrbaren Funktionen, die man in der Praxis sieht, sind streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Diese haben automatisch zu jedem y-Wert nur einen x, denn zu einem größeren x-Werte gehört dann ja zwangsweise ein größerer (bzw. kleinerer) y-Wert:

31

Streng mathematisch muss man allerdings noch aufpassen, dass der Wertevorrat nicht zu groß angegeben wird.

8 Beispiele zur Umkehrbarkeit

Einige Beispiele für umkehrbare und nicht umkehrbare Funktionen:

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto$ kaufmännische Rundung von x auf eine Stelle nach dem Komma

  32

- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

  33

- $f_3 : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

  34

- $f_4 : [0;\infty) \to [0;\infty)$ mit $x \mapsto x^2$

35

- $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$

36

- $f_6 : [-\pi/2;\pi/2] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$

37

- $f_7 : [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$ mit $x \mapsto \sin(x)$

38

- f_8 = Kehrwert:

39