5
Ungleichungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 2. Dezember 2011, 16:25

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.j3L7h.de/videos.html

1 Äquivalenzumformungen, Lösungsmenge

Vorbemerkung: Im Folgenden geht es ausschließlich um Gleichungen und Ungleichungen für *reelle* Zahlen.

Eine Gleichung oder eine Ungleichung zu vereinfachen, heißt, einen logisch äquivalenten, aber einfacheren Ausdruck anzugeben (wobei allerdings nicht immer klar ist, was „einfacher" ist):

1

Die weitestmögliche Vereinfachung ist die Lösung: eine logisch äquivalente Umformung, die konkrete Zahlenwerte liefert. Je nach Situation gibt es null (keine Lösung möglich) bis unendlich viele solcher Zahlenwerte. Um alle Möglichkeiten abzudecken, gibt man typischerweise eine Lösungsmenge [solution set] an:

2

2 Monoton steigende/fallende Funktionen

Viele gängige Funktionen werden, wenn man größere Zahlen einsetzt, im Wert immer größer, nie kleiner und bleiben nie gleich:

3

Solche Funktionen heißen streng monoton steigend [strictly increasing, seltener: strictly monotonically increasing]. Wenn man so eine Funktion auf beiden Seiten einer Ungleichung ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) anwendet, bleibt diese erhalten. Dies ist eine Äquivalenzumformung:

4

Seltener hat man Funktionen, die nicht *streng* monoton steigend, sondern nur monoton steigend [increasing, seltener: monotonically increasing]. Das heißt, dass der Funktionswert steigen oder auch gleich bleiben darf, wenn man größere Zahlen einsetzt:

5

Wenn man eine solche Funktion f auf beiden Seiten einer Ungleichung ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) anwendet, hat man *keine* Äquivalenzumformung:

6

Neben den steigenden Funktionen gibt es auch fallende [decreasing]: Wird der Funktionswert immer *kleiner*, wenn man größere Zahlen einsetzt, heißt die Funktion streng monoton fallend.

7

Wendet man eine streng monoton fallende Funktion auf beiden Seiten einer Ungleichung ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) an, dreht sich das Ungleichungszeichen um und man hat eine Äquivalenzumformung:

8

Kann der Funktionswert fallen oder aber gleich bleiben, wenn man größere Zahlen einsetzt, heißt die Funktion monoton fallend (ohne „streng“). Wenn man eine solche Funktion f auf beiden Seiten einer Ungleichung ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) anwendet und dann das Ungleichungszeichen umdreht, hat man *keine* Äquivalenzumformung:

9

Vorsicht: Viele Funktionen sind weder monoton fallend noch monoton steigend:

10

Dann helfen nur Fallunterscheidungen. Davon schauen wir uns im Folgenden einige an.

3 Quadratische Ungleichungen

Wenn links und rechts vom Ungleichungszeichen ein quadratischer Ausdruck derselben Variable steht wie bei $2x^2 + x - 4 \geq x^2 + 6x - 10$, bringt man zuerst alles auf eine Seite:

11

Dann ist nur noch zu entscheiden, ob/wo der verbleibende quadratische Ausdruck kleiner als, gleich oder größer als null ist. Ist die Parabel nach unten oder nach oben geöffnet? Was sind die Nullstellen? (pq-Formel!) Eine Skizze hilft hier viel:

12

4 Polynom-Ungleichungen

Steht links und rechts vom Ungleichungszeichen ein Polynom derselben Variable, geht man entsprechend wie bei quadratischen Ungleichungen vor:

13

Eine andere Möglichkeit ist, das Polynom komplett in Linearfaktoren und ggf. auch quadratische Faktoren zerlegt zu schreiben und dann abzuzählen, wie viele negativ sind:

14

Die Nullstellen zu finden, ist allerdings deutlich aufwendiger als bei quadratischen (Un-)Gleichungen, vor allem, wenn Potenzen jenseits der vierten vorkommen. Im Laufe des Semesters dazu mehr.

5 Bruch-Ungleichungen

Im einfachsten Fall wird bei einer Ungleichung mit Brüchen ein linearer Ausdruck durch einen anderen geteilt und mit null verglichen, zum Beispiel $\frac{2x-1}{x+4} \geq 0$. Die nötige Fallunterscheidung ergibt sich durch $+/+ = +$ und $-/- = -$:

15

Wenn rechts eine Konstante ungleich null steht, wie bei $\frac{2x-1}{x+4} \geq 3$, muss man ausführlich mit dem Nenner multiplizieren. Das führt zur selben Fallunterscheidung:

16

6 Betragsungleichungen

Bei Ungleichungen mit Betrag wie $|x-7|<5$ ist eine Fallunterscheidung nötig: Steht eine negative Zahl im Betrag oder nicht?

17

7 Gemischte Ungleichungen

Wenn mehrere der genannten Sachen auf einmal passieren wie bei $\frac{|x^2-5x+6|}{x-1}<5$, sind im Zweifelsfall mehrere Fallunterscheidungen nötig:

18

Wolfram Alpha kann auch das noch: `solve |x^2-5x+6|/(x-1)<5`