Lineare Näherung. Anwendungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 18. Dezember 2010, 22:24

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.youtube.com/joernloviscach

1 Lineare Näherung

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, existiert dort ihre Ableitung f' und es gilt:

1

Oder mit dem Klein-o von Landau geschrieben:

2

In dieser Schreibweise erkennt man deutlich die Tangentengerade und den – unbenannten und im Detail unbekannten – Rest.

Die Tangentengerade an den Graphen an der Stelle x_0 ist die *lineare Näherung* der Funktion f an der Stelle x_0. Statt die Funktion selbst zu untersuchen, genügt es oft, nur die lineare Näherungen zu betrachten – wenn man sich nicht zu weit von x_0 wegbewegt. Was „nicht zu weit weg“ dabei heißen soll, ist noch zu untersuchen.

Die lineare Näherung hilft, Funktionswerte zu schätzen, und ist wichtig, um das Schwingungs- und Dämpfungsverhalten komplexer Systeme zu untersuchen – dort natürlich keine lineare Näherung in einer Dimension, sondern zum Beispiel in Hunderttausenden von Dimensionen. Hier findet man charakteristische Schwingungsfiguren („Moden", „Eigenschwingungen").

Beispiel: Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ hat für $x = 100$ einen bekannten Wert. Welchen Wert hat sie aber für $x = 103$? Das lässt sich mit der Tangentengerade – also der linearen Näherung – schätzen: Statt den Funktionswert $f(103) = \sqrt{103}$ auszurechnen, schauen wir auf der Tangentengerade nach. Das ist viel einfacher auszurechnen:

3

Also wäre ein Schätzwert für $\sqrt{103}$:

4

Allerdings ist diese Zahl alleine noch nicht allzu hilfreich, weil wir keine Idee haben, wie groß der Fehler ist. Dies Argument gilt ja auch bei Messwerten, für die man keine Fehlerschranke oder einen erwarteten Fehler kennt.

Kann man die Funktion f zweimal ableiten, lässt sich aber eine Obergrenze für den Fehler angeben. Angenommen, wir wüssten, dass die zweite Ableitung $f''(x)$ für alle x zwischen x_0 und $x_0 + h$ im Betrag nicht größer als eine reelle Zahl M wird.

Die schlimmstmögliche Abweichung der Funktion von der Tangentengerade nach oben würde man erhalten, wenn $f''(x)$ immer gleich M wäre. Dann wäre die erste Ableitung von f:

5

Und die Funktion selbst wäre:

6

Die schlimmstmögliche Abweichung der Funktion von der Tangentengerade nach *unten* erhält man entsprechend, mit einem Minus vor dem M. Also liegt die Tangentengerade an der Stelle $x_0 + h$ maximal um plus oder minus diesen Wert neben der wahren Funktion:

7

Der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion liegt also an jedem Punkt in einem nach oben und unten parabelförmigen Korridor um die Tangentengerade. Der Betrag der zweiten Ableitung bestimmt, wie steil diese Parabeln sind.

Beim Beispiel mit $\sqrt{103}$ kann man M so bestimmen:

8

Also wissen wir nun mit Fehlergrenzen:

9

Zum Vergleich: Der exakte Wert ist $\sqrt{103} = 10{,}148891\ldots$.

Ähnliche Überlegungen kann man für höhere Ableitungen anstellen. Es ergibt sich dann ein Polynom („Taylor-Polynom"), dass sich an einer Stelle x_0 bestmöglich an die Funktion f schmiegt. Mehr dazu im zweiten Semester.

2 Numerische Schätzung von Ableitungen

Signale erhält man oft als Sammlung von Zahlen mit festem Zeitabstand h:

10

Angenommen, hier wäre tatsächlich eine differenzierbare Funktion f abgetastet worden, die auch für alle reellen Zeiten zwischen den Abtastpunkten definiert ist. Kann man dann aus den Messwerten die Ableitung von f schätzen?

Die zu naive Lösung ist, die Sekantensteigung von jeder Mess-Stelle x_0 nach rechts als Näherung für $f'(x_0)$ zu nehmen. Das ist aber aus der Balance. Beispiel:

Steigung am Scheitel eines Signals mit gerader Symmetrie:

11

Besser ist, die Sekantensteigung von der Stelle links (also $x_0 - h$) zur Stelle rechts (also $x_0 + h$) zu nehmen:

12

Dies stimmt noch exakt, wenn die Funktion f eine quadratische Parabel ist (Seminaraufgabe). Der Fehler dieser Schätzung hängt also offensichtlich von der dritten Ableitung f''' ab. Er fällt für $h \to 0$ mit dem Quadrat der Schrittweite h. Das kann man schon an den Einheiten sehen oder später mit einem Taylor-Poylnom begründen.

Die übliche Schätzung für die *zweite* Ableitung $f''(x_0)$ ist:

13

Das stimmt noch exakt, wenn die Funktion f eine kubische Parabel ist (Seminaraufgabe). Der Fehler dieser Schätzung hängt also offensichtlich von der vierten Ableitung $f'''' = f^{(4)}$ ab. Er fällt für $h \to 0$ mit dem Quadrat der Schrittweite h, wie der Fehler der üblichen Schätzung für die erste Ableitung. Das kann man wie dort herleiten.