

Komposition von Funktionen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. November 2010, 10:13

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

Videos dazu: <http://www.youtube.com/joernloviscach>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Die Komposition = Verkettung = Hintereinanderausführung [composition] von Funktionen f und g bedeutet, erst die Funktion g anzuwenden und dann auf deren Ergebnis eine Funktion f anzuwenden. Das ergibt wieder eine Funktion. Die wird $f \circ g$ genannt („f nach g“). Beispiel: $\sin \circ \exp$ bewirkt dies:

1

Man beachte die überraschende Reihenfolge. Die ist typischerweise wichtig: $\exp \circ \sin$ bewirkt etwas Anderes! (Wie kann man das schnell sehen?)

2

Streng müsste man sich hier noch über Definitionsbereiche Gedanken machen: Aus der inneren Funktion darf nichts herauskommen, was die äußere nicht verarbeitet. Also darf man nicht gedankenlos alles Mögliche in die innere Funktion hineinwerfen. Beispiel: Was ist sinnvollerweise der Definitionsbereich von $\sqrt{\circ} \ln$?

3

Verkettete Funktionen treten ständig auf, wenn man nur genau hinsieht: Wie kann man $x \mapsto \frac{1}{(\sin(x))^2+1}$ als Verkettung von Funktionen lesen?

4

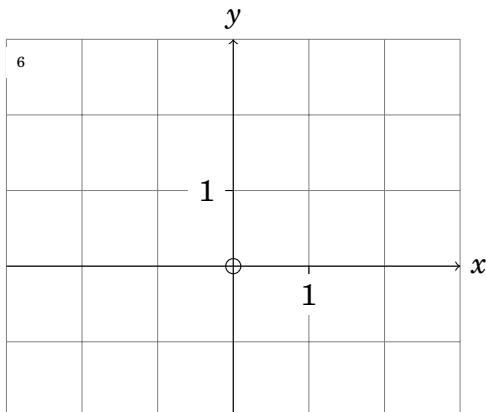
Nebenbei: Die Kettenregel sagt etwas über die Ableitung verketteter Funktionen, nämlich:

5

Die Verkettung einer Funktion f mit sich selbst wird oft formal als Potenz geschrieben: $f^4 := f \circ f \circ f \circ f$. (Nicht mit der vierten Ableitung $f'''' = f^{(4)}$ verwechseln!) Wie schon gezeigt, kommt das zum Beispiel bei Iterationsverfahren vor. Die Umkehrfunktion – wenn sie existiert – wirkt hier wie die Potenz -1 und wird deshalb als f^{-1} geschrieben.

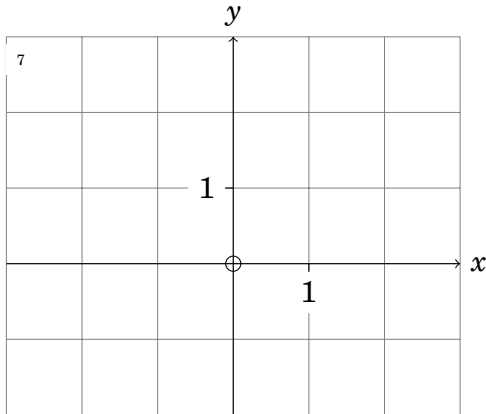
1 Vertikale Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen

Addiert man zum Funktionswert $f(x)$ eine Konstante, wird der Funktionsgraph vertikal verschoben – nach oben für eine positive Konstante:

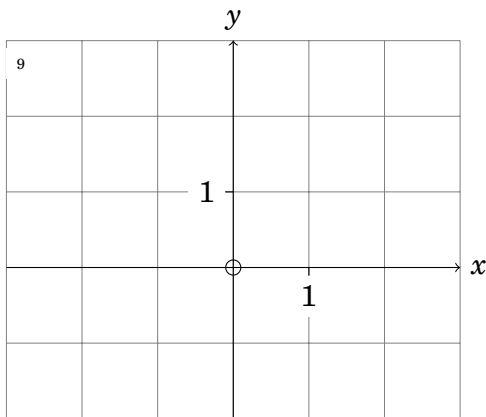


Multipliziert man den Funktionswert $f(x)$ mit einer Konstante, wird der Funktionsgraph von der x -Achse weg gestreckt (Konstante > 1), zu ihr hin gestaucht (Konstante zwischen 0 und 1) oder obendrein an der x -Achse gespiegelt (negative

Konstante):

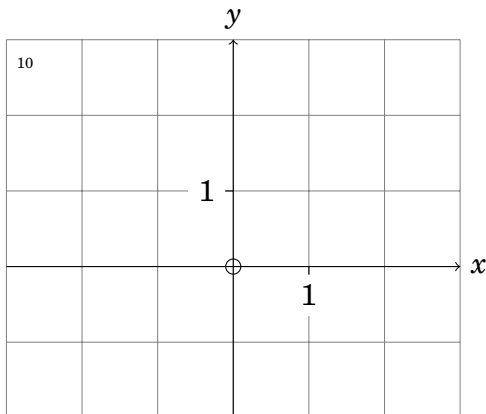


Alles auf einmal erhält man, wenn man eine Funktion $y \mapsto my + b$ mit der Funktion f verkettet, denn dies bedeutet $x \mapsto \overset{8}{\quad}$. In dieser Schreibweise wird erst gestreckt/gestaucht/gespiegelt und dann verschoben, alles vertikal.

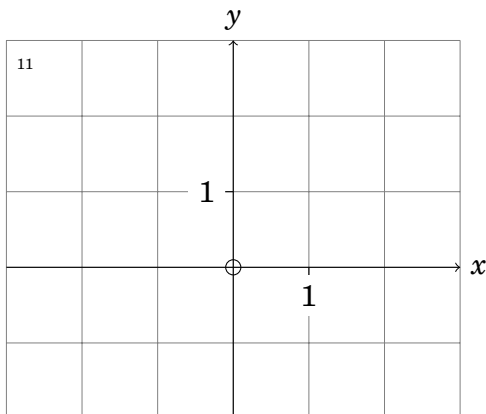


2 Horizontale Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen

Addiert man zu x innerhalb von $f(x)$ eine Konstante, wird der Funktionsgraph horizontal verschoben – nach links (!) für eine positive Konstante:



Multipliziert man x in $f(x)$ mit einer Konstante, wird der Funktionsgraph von der y -Achse weg gestreckt (Konstante zwischen 0 und 1!), zu ihr hin gestaucht (Konstante $> 1!$) oder obendrein an der y -Achse gespiegelt (negative Konstante):



Vorsicht: Verschiebung und Streckung funktionieren also horizontal genau anders herum als vertikal.

Alles auf einmal erhält man, wenn man f mit einer Funktion $x \mapsto (x - a)/k$ verkettet, denn dies bedeutet $x \mapsto \overset{12}{\quad}$. In dieser Schreibweise (Vorsicht, ungewöhnlich!) wird der Graph geometrisch erst gestreckt/gestaucht/gespiegelt und dann verschoben, alles horizontal.

