Partialbruchzerlegung

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. November 2010, 10:03

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.youtube.com/joernloviscach

1 Faktorisierung von Polynomen

Wiederholung: Polynome verhalten sich wie natürliche Zahlen. Wenn man eine ganze Zahl ohne Rest durch eine andere teilen kann, kann man die andere als Faktor abspalten. Das geht gegebenenfalls mehrfach:

1

Genauso kann man nach und nach Faktoren von einem Polynom abspalten, insbesondere Linearfaktoren zu Nullstellen des Polynoms:

2

Wir werden bei den komplexen Zahlen sehen, dass diese Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Zahlen immer vollständig gelingt. Mit reellen Zahlen bleibt gegebenenfalls ein Polynom ohne Nullstelle (also mit geradem Grad!) als letzter Faktor. Wir werden ebenfalls später sehen, dass man dieses Polynom immer als Produkt von reellen Polynomen zweiten Grades schreiben kann:

3

2 Partialbruchzerlegung für ganze Zahlen

Wo man Polynome in Faktoren zerlegt, zerlegt man rationale Funktionen in Partialbrüche [partial fractions]. Das kann man sich zunächst wieder modellhaft an Brüchen ganzer Zahlen veranschaulichen: Gegeben seien die beiden ganzen Zahlen 5 und 13, die keinen Teiler gemeinsam haben. Dann kann man zu jeder weiteren ganzen Zahl wie hier 29 ganze Zahlen x und y finden, so dass:

4

Dass es solche x, y geben muss, sieht man so: Indem man die rechte Seite auf einen Bruchstrich bringt, sieht man, dass diese Zerlegung äquivalent ist zu:

5

Das heißt:

6

Also muss man ein x finden, so dass $29 - 13x$ durch 5 teilbar ist. Probieren wir das aus:

7

Bei Teilung durch 5 bleiben nur Reste von 0 bis 4. In den ersten fünf Zeilen kommt jeder Rest nur einmal vor, sonst könnte man die beiden Zeilen voneinander abziehen und hätte, dass 13 mal eine Zahl von 1 bis 4 durch 5 teilbar wäre. Also kommt in den ersten fünf Zeilen jeder Rest von 0 bis 4 genau einmal vor: Es muss der Rest 0 vorkommen.

Wir haben also gefunden:

8

Die beiden Zahlen x und y sind nicht eindeutig bestimmt: Man kann zum Beispiel 5 von x subtrahieren und 13 zu y addieren.

3 Partialbruchzerlegung für einfache Polstellen

Nun probieren wir etwas Ähnliches für eine rationale Funktion der Art:

9

Dabei sollen p und q Polynome sein, die keine Nullstelle an $x = 3$ haben. Man kann umformen:

10

Das Polynom im Zähler des langen Bruches wird null für $x = 3$. Also kann man $x - 3$

daraus abspalten und mit dem $x-3$ im Nenner kürzen. Damit klappt Folgendes:

11

mit einer passenden Zahl A und einem passenden Polynom s. Dieses Polynom s hat maximal einen Grad, der um eins kleiner ist als das Maximum der Grade der Polynome p und q.

4 Partialbruchzerlegung für mehrfache Polstellen

Angenommen, die Polstelle wäre nicht einfach, sondern fünffach:

12

Dabei sollen p und q Polynome sein, die keine Nullstelle an $x = 3$ haben. Man kann umformen:

13

Das Polynom im Zähler des langen Bruches wird null für $x = 3$. Also kann man $x-3$ daraus abspalten und mit einem der fünf Faktoren $x-3$ im Nenner kürzen. Damit klappt Folgendes:

14

mit einer passenden Zahl A und einem passenden Polynom s. Dieses Polynom s hat maximal einen Grad, der um eins kleiner ist als das Maximum der Grade der Polynome p und q.

Mit dem zweiten Summanden geht man nun genauso vor – und so weiter, bis die Faktoren $x-3$ im Nenner aufgebraucht sind. An Ende ergibt sich ein Ausdruck wie:

15

mit passenden Zahlen A, B, C, D, E und einem passenden Polynom r. Dieses Polynom r hat maximal einen Grad, der um fünf kleiner ist als das Maximum der Grade von p und q.

5 Partialbruchzerlegung für quadratische Terme

Angenommen, man kann im Nenner ein quadratisches Polynom abspalten, beispielsweise:

16

und angenommen, q ist nicht ohne Rest durch dieses quadratische Polynom $x^2+3x+11$ teilbar. Dann gilt für alle Zahlen A und B:

17

Wenn man die Zahlen A und B so bestimmen kann, dass der Zähler des langen Bruchs einen Faktor $(x^2+3x+11)$ enthält, kann man diesen Faktor kürzen und erhält:

18

mit einem passenden Polynom s. Dieses Polynom s hat maximal einen Grad, der um zwei kleiner ist als das Maximum der Grade von p und q.

Solche Zahlen A und B gibt es netterweise praktisch immer (Die Ausnahme folgt gleich!), denn bei der Polynomdivision $(p(x)-q(x)(Ax+B)):(x^2+3x+11)$ kommen mit passendem A und B alle denkbaren Reste $ux+v$ vor, insbesondere der Rest

$0 = 0x + 0$, so dass also $p(x) - q(x)(Ax + B)$ durch $x^2 + 3x + 11$ teilbar ist. Dass alle Reste vorkommen müssen, kann man ähnlich wie in Abschnitt 2 begründen.

Achtung: Das Polynom $x^2 + 3x + 11$ darf aber nicht mehrfach im Nenner vorkommen, sonst klappt das nicht immer. Denn die Division $q(x) : (x^2 + 3x + 11)$ und damit die Division $q(x)(Ax + B) : (x^2 + 3x + 11)$ gingen sonst ohne Rest auf, ohne dass A und B etwas bewirken könnten.

6 Allgemeiner Fall der Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine rationale Funktion:

19

Ist der Grad des Zählers größer oder gleich dem des Nenners, führt man als Erstes eine Polynomdivision aus, um das Asymptotenpolynom aus dem Bruch zu nehmen:

20

Der Grad des Polynoms im Zähler rechts ist nun höchstens der des Nennerpolynoms minus 1.

Das Nennerpolynom ist nun so weit wie möglich in Linearfaktoren (also x minus Nullstelle) und in quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen zu zerlegen. Hat der Zähler ebenfalls eine dieser Nullstellen oder einen dieser quadratischen Faktoren, ist zu kürzen. (Wir gehen hier davon aus, dass spätestens danach keiner von den quadratischen Faktoren im Nenner noch doppelt vorkommt, sonst wird es aufwendiger.) Es bleibt dann vielleicht etwas wie:

21

Das Polynom im Zähler hat nun höchstens den Grad 22 .

Nun kann man Partialbrüche abspalten, Faktor für Faktor des Nenners:

23

mit noch unbekannten Konstanten A bis G.

7 Bestimmung der Konstanten

Um die Konstanten zu bestimmen, könnte man tatsächlich die Polynomdivision ausführen. Das ist zwar ein simples Rezept, aber sehr rechenaufwendig. Wenn man zu Fuß eine Partialbruchzerlegung hinschreibt, arbeitet man typischerweise rückwärts: Man schreibt die Form des Ergebnisses hin und bestimmt dann die Konstanten.

Das Ziel ist beispielsweise:

24

Um die vier Konstanten A bis D zu bestimmen, fasst man das wieder zu einem Bruch zusammen:

25

Also muss für die Zähler gelten:

[26]

Das muss für alle reellen Zahlen x gelten. Daraus muss man nun vier Gleichungen für die vier Konstanten A bis D basteln. Dafür gibt es zwei Wege:

- Verschiedene Werte für x einsetzen: Zum Beispiel findet man für $x = 5$:

  [27]

- Links und rechts Potenzen von x zusammenfassen; Koeffizientenvergleich:

  Zum Beispiel steht links $2x^3$ und rechts [28] , so dass also gelten muss: [29] So führt es auch Wolfram Alpha mit „Show steps" vor.

Egal, welchen der beiden Wege man wählt: Im Endeffekt ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten A, B, C, D.