Algebraische Gleichungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 12. November 2010, 20:59

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.youtube.com/joernloviscach

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

1 Begriff

Betrachten wir eine Gleichung, in der nur eine Unbekannte x, konstante Zahlen und die Grundrechenarten vorkommen:

1

Die Unbekannte und die übrigen Zahlen sind typischerweise reell, gerne auch mal komplex.

Indem man mit den Nennern multipliziert, lassen sich alle Divisionen beseitigen:

2

Vorsicht: Das ist nicht immer eine Äquivalenzumformung, denn es können Lösungen x hinzukommen, wenn man mit null multipliziert hat. Beispiel:

3

Also immer den ursprünglichen Definitionsbereich beachten!

Es genügt es also, eine Gleichung zu betrachten, die man mit Plus, Minus und Mal hinschreiben kann: eine „algebraische“ Gleichung [algebraic equation]. Der höchste tatsächlich vorkommende Exponent von x heißt Grad der Gleichung. Typischerweise fasst man die verschiedenen Potenzen von x jeweils zusammen und bringt alles auf eine Seite, so dass man eine Gleichung folgender Art erhält:

4

Eine algebraische Gleichung n-ten Grads zu lösen heißt also nichts Anderes, als die Nullstellen [roots] eines Polynoms n-ten Grads zu finden. Insbesondere gibt es höchstens n verschiedene Lösungen; wenn der Grad ungerade ist, muss es immer mindestens eine Lösung geben. (Für komplexe Zahlen werden es – später – genau n Lösungen werden, wenn man mehrfache Lösungen mitzählt.)

2 Satz von Vieta

Wenn man das Polynom auf der linken Seite einer algebraischen Gleichungen durch den höchsten Koeffizienten teilt, erhält man die „Normalform“ der Gleichung, etwas wie:

5

Angenommen (angenommen!), das Polynom lässt sich komplett in Linearfaktoren zerlegen, dann muss sich die linke Seite schreiben lassen als:

6

Wenn man das ausmultipliziert, sieht man für den zweithöchsten und den niedrigsten Koeffizienten:

7

Ein wenig kompliziertere Zusammenhänge finden sich für die übrigen Koeffizienten. Das geht natürlich nicht nur mit Polynomen vom Grad 5. Dies ist der Satz von Vieta. Er hilft hin und wieder, trickreich zu vereinfachen.

3 Quadratische Gleichungen

Die Normalform einer algebraischen Gleichung zweiten Grads („quadratische Gleichung“) ist:

8

Wenn man diese Gleichung zu Fuß löst, addiert und subtrahiert man eine quadratische Ergänzung, mit der man die Terme mit x^2 und x zu einem Quadrat zusammenfassen kann:

9

Also ist die ursprüngliche Gleichung äquivalent zu:

10

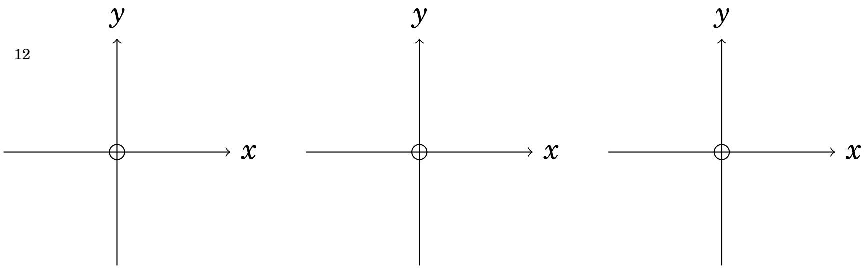
Es gibt damit drei Fälle:

11

In der Praxis wendet man die pq-Formel als Rezept an, passt aber auf, was unter der Wurzel passiert. Wenn q negativ ist, hat man garantiert den dritten Fall (zwei Lösungen), aber das ist nicht die einzige Möglichkeit dafür.

Diese drei Fälle kann man sich auch am Verlauf des Funktionsgraphen $x \mapsto x^2 + px + q$ klar machen:

12



4 Kubische Gleichungen

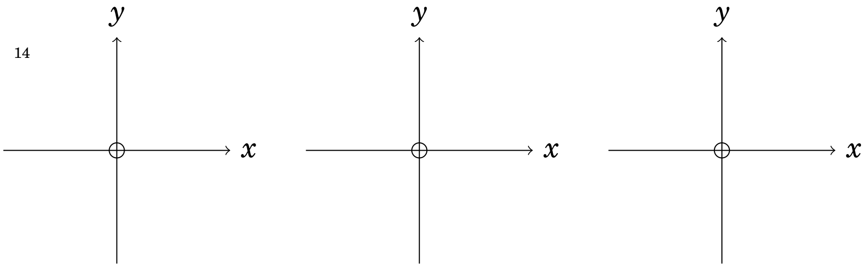
Die Normalform einer algebraischen Gleichung dritten Grads („kubische Gleichung") ist:

13

Auch dafür gibt es eine allgemeine Lösungsformel, von der zum Beispiel Wolfram Alpha eine Idee vermittelt, wenn man `x^3+ax^2+bx+c=0` eintippt. Es ist offensichtlich keine gute Idee, diese Gleichung in einem Zug hinzuschreiben. Vielmehr rechnet man schrittweise Hilfsvariablen aus. Das kann man bei Bedarf nachschlagen (Link).

Geht es bei der kubischen Gleichung um reelle Koeffizienten und reelle Lösungen x, lassen sich drei Fälle unterscheiden:

14



5 Gleichungen höheren Grads

Für Gleichungen vierten Grads gibt es eine haarsträubende Lösungsformel (Link). Für Gleichungen fünften und höheren Grads gibt es dagegen keine *allgemeinen* Lösungsformeln. Diese Gleichungen haben typischerweise Lösungen, die sich *nicht* mit Wurzeln und den Grundrechenarten aus den Koeffizienten berechnen lassen: Satz von Abel-Ruffini (Link).

Einige Gleichungen mit Grad fünf oder höher sind sozusagen zufällig mit Wurzelausdrücken lösbar, zum Beispiel:

15

Das ist aber die Ausnahme. Die einfachste algebraische Gleichung, die nicht mehr mit Wurzelausdrücken aus den Koeffizienten lösbar ist, ist:

16

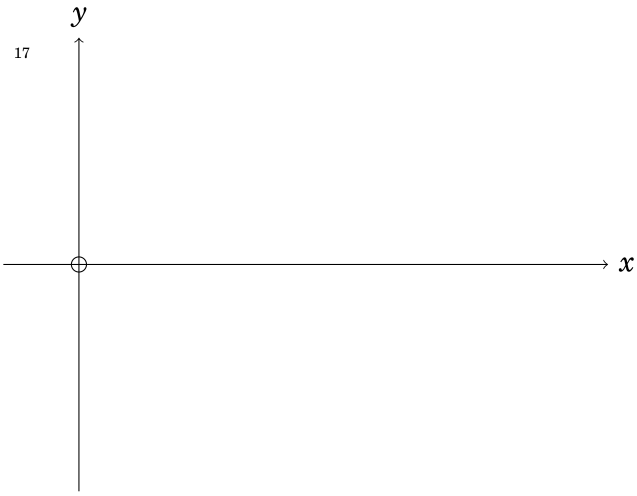
6 Iterative Lösung, Nullstellensuche, Newton-Verfahren

Schon bei Gleichungen dritten Grades greift man statt zu einer fertigen Lösungsformel gerne zur Nullstellensuche: schrittweise genauer werdenden (= iterativen) Lösungsverfahren. Für Gleichungen mit Grad von fünf oder höher gibt es ja sowieso keine allgemeinen schulmäßigen Lösungsformeln.

Beliebt, weil einfach und sehr schnell ist das Newton-Verfahren, auch Newton-Raphson-Verfahren genannt. Es lässt sich nicht nur verwenden, um die Nullstellen von Polynomen zu finden, sondern verarbeitet auch alle anderen stetig differenzierbaren Funktionen. Das Verfahren benötigt allerdings einen Startwert x_0 und läuft nicht zwangsläufig zu einer Nullstelle, wenn man nicht aufpasst.

Die Grundidee des Newton-Verfahrens ist, an der Stelle x_0 die Tangentengerade an die Funktionskurve zu legen und zu sehen, wo diese Gerade die x-Achse schneidet. An dieser Stelle x_1 wiederholt man das; das ergibt eine Stelle x_2 und so weiter. Wenn diese x-Werte hinreichend dicht beieinander liegen oder wenn der Funktionswert hinreichend dicht an 0 liegt, bricht man ab:

17

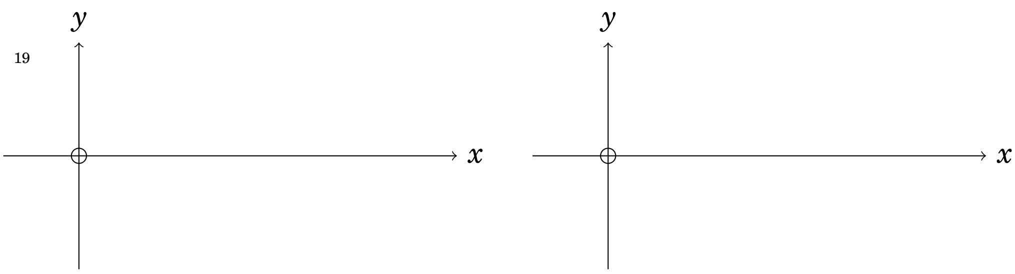


Diese Idee lässt sich in Formeln übersetzen. Dazu betrachtet man am besten einen einzigen Schritt, zum Beispiel den von x_0 zu x_1. Die gleiche Rechnung passiert dann immer wieder: um aus x_1 das x_2 zu berechnen und so weiter.

18

Es gibt Situationen, in denen das Newton-Verfahren versagt:

19



Wenn man aber mit x_0 hinreichend dicht an der Nullstelle startet und es auf dem Weg dahin keine zu flachen Stellen gibt, führt das Newton-Verfahren zum Erfolg.

Am Beispiel: Zu lösen ist $x^3 - 7 = 0$. Wir suchen also $x =$ [20] ; in der Praxis mit einer allgemeinen Gleichung wüsste man das aber nicht vorher! Hier ist der Iterationsschritt:

[21]

.

Demo mit OpenOffice und verschiedenen Startwerten.

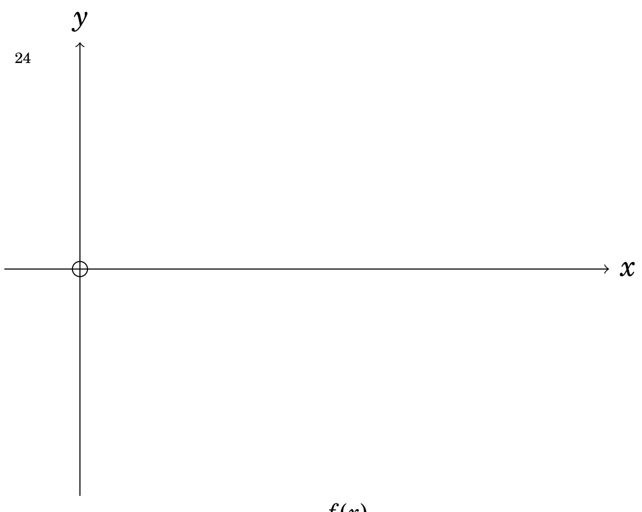
Die Konvergenz (= Annäherung an einen Grenzwert) passiert dabei mit erstaunlicher Geschwindigkeit: Nach kurzer Einlaufzeit verdoppelt sich die Zahl der gültigen Dezimalstellen bei jeder weiteren Iteration. Mit anderen Worten: Der Fehler wird bei jedem Schritt etwa quadriert, wie [22] .

Dass der Fehler so schnell sinkt, kann man sich so überlegen: Gesucht ist die Nullstelle $\underline{x}$ in der Nachbarschaft des Startwerts x_0. In der Newton-Iterationsformel kommt die Funktion $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ vor. An der Stelle $\underline{x}$ hat die den Wert $\underline{x}$. Was ist ihre Steigung dort? Dazu wird die Ableitung benötigt:

[23]

Also ist die Steigung an der Stelle $\underline{x}$ gleich 0. Damit ergibt sich dieses Bild:

[24]



Die Funktion $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ läuft also lokal wie eine Parabel oder noch flacher durch den Punkt $(x|y) = (\underline{x}|\underline{x})$. Wenn man mit x etwas von x_0 abweicht, ist das Funktionsergebnis etwas wie das Quadrat dieser Abweichung.