

# Konvergenzradius. Lösen von Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 6. Juni 2010, 19:12

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

Videos dazu: <http://www.youtube.com/joernloviscach>

## 1 Potenzreihen

Die Entwicklung einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  in eine Taylor-Reihe war:

---

1

Es stellen sich zwei Fragen:

1. Ergibt diese unendliche lange Summe (Fachbegriff: „Reihe“) Sinn? (Dies führt auf den Begriff „Konvergenzradius“.)
2. Falls die Reihe Sinn ergibt: Kommt aus ihr wieder die Funktion  $f$  heraus? (Dies führt auf den Begriff der „analytischen Funktionen“.)

Zur ersten Frage: Die Taylor-Reihe ist eine spezielle Art, eine Potenzreihe zu bilden. Um die erste Frage zu beantworten, kann man einfacher eine allgemeine Potenzreihe untersuchen:

---

2

Dabei sind die  $a_0, a_1, \dots$  feste Zahlen.

Was soll diese unendlich lange Summe mathematisch bedeuten?

---

3

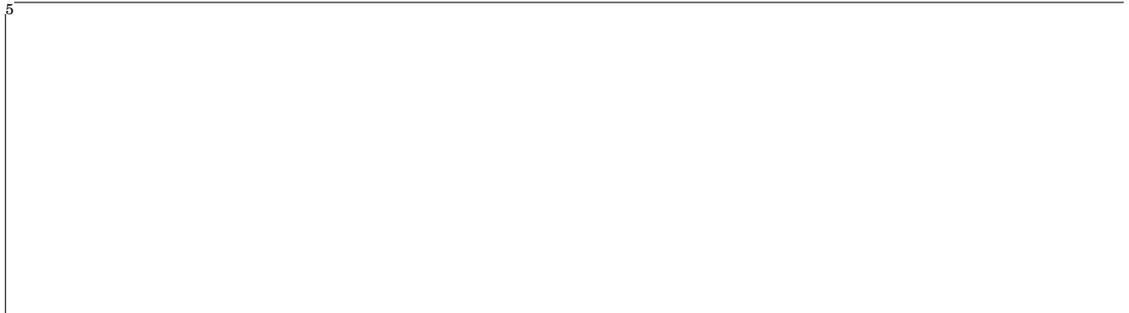
Wenn dieser Grenzwert für ein gegebenes  $x$  existiert, sagt man: Die Reihe konvergiert für dieses  $x$ . Die große Frage ist, für welche  $x$  das der Fall ist.

Anschaulich ist klar, dass die Potenzreihe um so mehr zur Explosion neigt, je weiter  $x$  von  $x_0$  weg liegt, also je größer  $|x - x_0|$  wird. Und in der Tat findet man genau das: Zu jeder Potenzreihe gibt es einen sogenannten Konvergenzradius  $r$ , so dass die Reihe für  $|x - x_0| < r$  konvergiert und für  $|x - x_0| > r$  divergiert (also keinen Grenzwert hat). Genau auf dem Rand, also für  $|x - x_0| = r$ , kann sie konvergieren oder divergieren, je nach  $x$ . Im Prinzip sieht das so aus:



Im Fall  $r = \infty$  hat man immer Konvergenz, so wie bei den Funktionen  $\exp$ ,  $\sin$  und  $\cos$ . Im Fall  $r = 0$  kann man nur  $x = x_0$  einsetzen, was nicht sehr spannend ist.

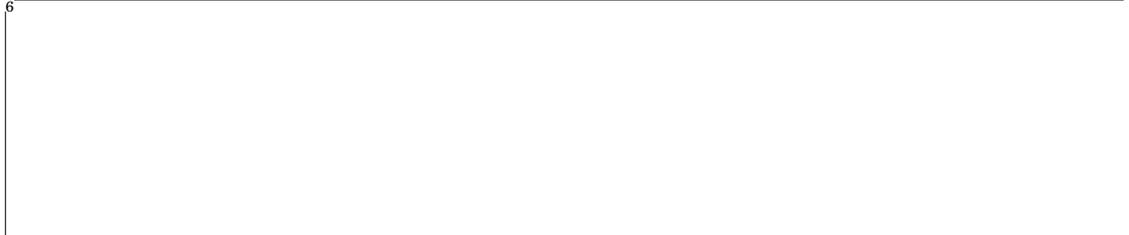
Der Begriff *Konvergenzradius* lässt an eine Kreisscheibe denken – und genau darum geht es: Setzt man Zahlen  $x \in \mathbb{C}$  in die Potenzreihe ein, ist das Verhalten so:



Dass die kritische Grenze genau ein Kreis ist, ist zunächst überraschend.

## 2 Konvergenz von Potenzreihen

Angenommen,  $x$  liegt so dicht bei  $x_0$ , dass  $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \leq 0,999$  für alle  $n$  gilt. Dann kann man den Betrag des  $n$ -ten Summanden der Potenzreihe nach oben abschätzen:



Wenn man die Reihe Summand für Summand in  $\mathbb{C}$  einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell schrumpfenden Abständen:

Die Reihe wird in diesem Fall also konvergieren. Dasselbe passiert auch mit 0,99999 usw. statt 0,999.

Angenommen dagegen,  $x$  liegt so fern von  $x_0$ , dass  $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \geq 1,001$  für alle  $n$  gilt. Dann kann man den Betrag des  $n$ -ten Summanden der Potenzreihe *nach unten* abschätzen:

Wenn man die Reihe Summand für Summand in  $\mathbb{C}$  einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell *wachsenden* Abständen:

Die Reihe wird in diesem Fall also divergieren. Dasselbe passiert auch mit 1,00001 usw. statt 1,001.

### 3 Konvergenzradius

Es kommt also nur auf den Betrag  $|x - x_0|$  an. Die Grenzlinie zwischen Konvergenz und Divergenz muss deshalb wirklich ein Kreis sein, keine Quadrat oder eine andere Figur. Der Radius dieses Kreises heißt Konvergenzradius  $r$  der Potenzreihe.

Im Allgemeinen ist  $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$  nicht *durchgängig* größer oder kleiner als 1, was die Sache kompliziert macht. Wesentlich ist, ob  $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$  „meist“ kleiner oder aber größer ist als eins. Endlich viele Ausreißer schaden nicht.

Als Trick definiert man den „Limes superior“  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ , das ist der höchste Häufungspunkt einer Folge – wobei  $+\infty$  und  $-\infty$  erlaubt sind. Beispiele:

| Folge                     | $\limsup$ |
|---------------------------|-----------|
| 1;2;3;1;2;3;1;2;3;...     | $10$      |
| 1;10;2;20;3;30;...        | $11$      |
| 0,9;0,99;0,999;0,9999;... | $12$      |

Dann lässt sich für den Konvergenzradius schreiben:

<sup>13</sup>

wobei ausnahmsweise  $1/0 := \infty$  und  $1/\infty := 0$  gerechnet wird. Folgende drei Fälle kann man dann unterscheiden:

<sup>14</sup>

## 4 Analytische Funktionen

Nun zum zweiten Problem: Angenommen, eine Taylor-Reihe konvergiert für ein gegebenes  $x$ . Ist das Ergebnis dann wieder  $f(x)$ ?

Funktionen  $f$ , die das erfüllen, heißen analytisch. Jede analytische Funktion muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein. Das gilt aber nicht umgekehrt: Eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, muss nicht unbedingt analytisch sein. Will sagen: Nicht jede konvergente Taylor-Reihe summiert sich wieder zu der zu Grunde liegenden Funktion  $f$ .

Die Ausnahmen sind allerdings exotisch. Hier ist ein Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion schmiegt sich bei  $x = 0$  extrem stark an die  $x$ -Achse: Der Funktionswert und alle Ableitungen sind dort 0. Das sieht etwa so aus:

15

Die Taylor-Reihe dieser Funktion  $f$  für  $x_0 = 0$  ist deshalb für alle  $x$  gleich null – also nicht gleich  $f$ . So etwas passiert aber im wahren Leben selten.

## 5 Lösen von Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Für besonders fiese Differentialgleichungen kann man eine Potenzreihe als Ansatz verwenden. Beispiel:  $y' = y^2 + x$  mit  $y(2) = 3$ . Setzen wir also die Lösung  $y$  als eine Potenzreihe an der Startstelle  $x = 2$  an:

16

Die Anfangsbedingung  $y(2) = 3$  heißt dann:

Die Potenzreihe setzt man in die Differentialgleichung ein und vergleicht die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von  $(x - 2)$ :

17

18

Auf diese Weise ist es bei vielen Differentialgleichungen möglich, die ersten Koeffizienten der Reihe auszurechnen. Man kann die Reihe danach abbrechen und hat damit ein Taylor-Polynom als Näherung für die Lösung.

Manchmal findet man sogar eine handliche Formel für *alle* Koeffizienten. Vorsicht: Die damit gebildete Potenzreihe funktioniert aber nur innerhalb ihres Konvergenzradius.