

Algebraische Lösung von linearen DGL-Systemen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 11. Mai 2010, 19:36

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

Videos dazu: <http://www.youtube.com/joernloviscach>

1 Lösungen aus Eigenvektoren

Die Differentialgleichung des Federpendels ohne äußere Anregung lässt sich in dieses Differentialgleichungssystem umschreiben:

1

Das ist ein Spezialfall dieser Situation: ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

mit einer konstanten quadratischen Matrix A mit n Spalten und n Zeilen. Was für ein Typ an Differentialgleichungssystem ist das?

2

Wenn \mathbf{v} ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist, kann man sehr schnell eine spezielle Lösung der Differentialgleichung angeben:

3

Was für ein Verhalten hat diese Lösung für $t \rightarrow \infty$ abhängig vom Eigenwert λ ?

4

Wenn die $n \times n$ Matrix A auch n verschiedene Eigenwerte hat (bei komplexen Zahlen der wahrscheinliche Fall), kann man jeden Vektor \mathbf{x}_0 in Eigenvektoren zerlegen:

5

Damit lässt sich sofort hinschreiben, wie sich der Startzustand \mathbf{x}_0 im Laufe der Zeit entwickelt:

6

Das ist also die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems!

Die Eigenwerte sagen einem etwas über die Stabilität. Es ist sicher gestellt, dass keine Lösung explodiert, wenn dies gilt:

7

Gibt es auch nur eine Ausnahme davon, explodiert praktisch *jede* Lösung!

Gibt es weniger als n verschiedene Eigenwerte, ist die Situation ähnlich. Das ist aber etwas schwieriger zu untersuchen.

Welche Eigenwerte hat die Matrix für das Federpendel?

8

Das sind alte Bekannte!

2 Exponentialfunktion von Matrizen

Das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

lässt sich auch noch anders angehen. Betrachten wir das in einer Dimension:

9

Hier ist die Lösung:

10

Angesichts dessen wäre doch hübsch, wenn die Lösung des Differentialgleichungssystems sich so schreiben ließe:

11

Hier wir abermals die Exponentialfunktion erweitert. (Was hatten wir schon als Erweiterung der Exponentialfunktion?)

Die Exponentialfunktion einer Zahl z ist so definiert:

12

Die Exponentialfunktion einer quadratischen (!) Matrix M wird so definiert:

13

Und nun kann man nachrechnen, dass die eben angegebene Lösung mit der Exponentialfunktion tatsächlich funktioniert:

14

Streng genommen muss man allerdings untersuchen, ob diese unendliche Summe („Reihe“) auch wirklich einen Grenzwert hat und ob man Summand für Summand ableiten darf.

Vorsicht: In MATLAB® & Co. schreibt man die Exponentialfunktion von Matrizen wie $\text{expm}([1, 2; 3, 4])$. Die Funktion $\text{exp}([1, 2; 3, 4])$ berechnet dagegen die herkömmliche Exponentialfunktion von jedem Eintrag. Das ist etwas Anderes!