

Eigenwerte und Eigenvektoren

Jörn Loviscach

Versionsstand: 22. April 2010, 21:31

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

Videos dazu: <http://www.youtube.com/joernloviscach>

1 Begriff

Fast das Einfachste, was eine quadratische (!) Matrix A mit einem Vektor \mathbf{v} veranstalten kann, ist, ihn zu einem Vielfachen (λ -fachen) von sich zu machen:

|

Mit dem Nullvektor geht das für alle λ . Das sagt also nichts über die Matrix A ; deshalb fordert man $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Das Vielfache, also die Zahl λ , heißt dann Eigenwert [eigenvalue]; der Vektor heißt dann Eigenvektor [eigenvector].

Alle Vielfachen eines Eigenvektors (außer dem Nullvektor) sind automatisch auch Eigenvektoren; sie definieren eine Eigenrichtung. Die Zahl Null kann aber ein Eigenwert sein – wenn die Matrix einen Vektor zum Nullvektor macht, der nicht selbst der Nullvektor ist.

Beispiele:

Matrix	EV	EW	EV	EW
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$:	2	3	4	5
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:	6	7	8	9
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:	10	11	12	13
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:	14	15	16	17
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:	18	19	20	21

Achtung: Die Antworten können anders ausfallen, wenn man nach *komplexen* statt reellen Eigenwerten sucht!

Man kennt sofort die Eigenwerte und Eigenvektoren der Potenzen der Matrix: Wenn \mathbf{v} ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist, gilt für $A^3 \mathbf{v}$:

22

und, falls die inverse Matrix existiert, für $A^{-1}\lambda\mathbf{v}$:

23

2 Anwendungen

In der Physik treten geometrische Eigenvektoren und ihre Eigenwerte zum Beispiel bei den Drehbewegungen auf: Der Trägheitstensor (durch eine 3×3 -Matrix darstellbar) beschreibt für alle Achsen, wie schwer es ist, ein Objekt um die jeweilige Achse zu drehen. Er hat drei Eigenrichtungen; die drei entsprechenden Eigenwerte sind die Hauptträgheitsmomente. Das Verhalten des Körpers lässt sich also durch drei Richtungen und drei Zahlen beschreiben:

24

Spannender sind Eigenvektoren in abstrakten Vektorräumen, insbesondere Eigenfunktionen, also Eigenvektoren in Funktionsräumen. Sie treten ebenso als Eigenschwingungen auf wie als Elektronenorbitale. Die Menge aller Eigenwerte einer Matrix heißt Spektrum. Das hat einen guten Grund: Für die schwingende Saite ist dieses mathematische Spektrum auch (fast) das akustische Frequenzspektrum; für das um den Atomkern fliegende Elektron ist das mathematische Spektrum auch das Energiespektrum, dessen Differenzen (Quantensprünge zwischen zwei Niveaus) im ausgestrahlten Licht sichtbar werden. An diesen Beispielen sieht man, dass die Eigenwerte oft interessanter sind als die Eigenvektoren: Das Spektrum sagt sozusagen in Kurzform, was die Matrix bewirkt.

Rein mathematisch sind Eigenvektoren interessant, weil man mit ihnen anschaulich verstehen kann, wie eine gegebene Matrix wirkt. Angenommen, man kann einen Vektor \mathbf{x} mit Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ der Matrix A darstellen: $\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \dots$. Dann lässt sich sofort berechnen, was A mit \mathbf{v} macht:

25

3 Bestimmung von Eigenwerten

Der einfachste – aber wegen Rechenaufwand und Rundungsfehlern selten praktisch sinnvolle – Weg, um die Eigenwerte λ einer quadratischen Matrix A zu be-

