Überblick über das zweite Semester

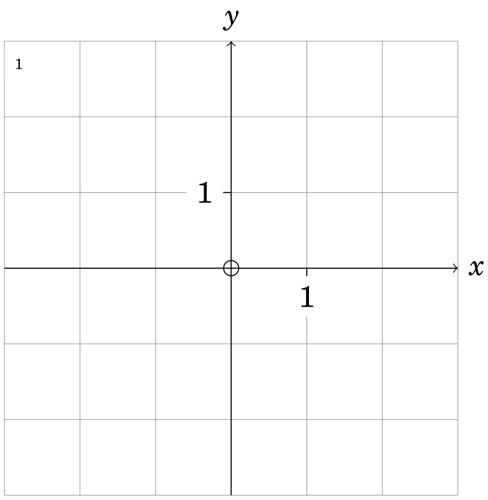
Jörn Loviscach

Versionsstand: 27. März 2010, 20:48
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

1 Lineare Algebra

„Lineare Algebra" ist nur ein großes Wort für die Lehre von den Vektoren und Matrizen. Dafür gibt es mehrere große Anwendungsgebiete:

- Analytische Geometrie in zwei und drei Dimensionen:



- Mechanik in zwei und drei Dimensionen:

2

- Analyse und Simulation von (näherungsweise?) linearen Systemen in Dutzenden bis Hunderttausenden von Dimensionen:

3

- Rechnen mit Funktionen, als ob sie Pfeile wären, zum Beispiel zur Signalverarbeitung und zur Analyse dynamischer Systeme:

4

Die dazugehörige Numerik befasst sich vor allem mit großen linearen Gleichungssystemen:

5

Dafür gibt es viele fertige in Software verfügbare Standardmethoden. Wir sehen uns einige der grundlegenden Probleme und Ideen an, um einen Eindruck zu gewinnen, worauf man bei der Wahl einer Lösungsmethode achten sollte.

2 Dynamische Systeme

Ein „dynamisches System“ ist beschrieben durch einen Anfangszustand und eine Regel, wie sich der Zustand im Zeitverlauf entwickelt. Beispiele für dynamische

Systeme:

6

Dynamische Systeme verhalten sich nicht immer so, wie man das naiv erwartet. Das einfachste Beispiel für ein dynamisches System mit überraschenden Eigenschaften ist die „logistische Abbildung“. Hier ist der Zustand eine Zahl $x \in [0,1]$. Der Zustand x ändert sich von einem Zeitpunkt zum nächsten gemäß $x \mapsto 4x(1-x)$. Das Interessante an diesem System ist, dass selbst kleinste Abweichungen in x schnell zu großen Abweichungen anwachsen: „deterministisches Chaos“ (Demo in OpenOffice). Um langfristige Vorhersagen zu machen, müsste man den Anfangswert absurd genau messen. Solche Effekte versucht man in technischen Systemen zu verhindern – oder auch gezielt zu nutzen.

Die meisten technisch interessanten dynamischen Systeme werden durch Differentialgleichungen beschrieben, also Gleichungen, welche Ableitungen enthalten, zum Beispiel:

7

Die Lösungen solcher Gleichungen sind keine einzelnen Zahlenwerte, sondern komlette Bahnkurven, Signalverläufe und so weiter.

Simulationen und Regelprozesse fußen auf Differentialgleichungen. Deshalb sind Differentialgleichungen ein großes Kapitel dieses Moduls. Praktisch relevante Differentialgleichungen lassen sich typischerweise nur per Rechner (angenähert) lösen: Dies ist der numerische Aspekt der Differentialgleichungen. Hier soll es wieder nur darum gehen, fundierte Ideen zu entwickeln, wie man Lösungssoftware einsetzt und wo Probleme drohen.

Bei Steuerungsprozessen und in der Informatik gibt es typischerweise keine kontinuierlichen Zahlenwerte und damit auch keine Differentialgleichungen, sondern nur endlich viele verschiedene Zustände. Solche dynamischen Systeme sehen wir uns später in der Informatik an, insbesondere die „Zustandsautomaten“:

8

3 Potenzreihen

Mit Hilfe von Tangentengeraden kann man viele Funktionen vereinfacht behandeln. Oft krümmt sich eine Funktion zu schnell von der Tangentengerade weg, dann sind Schmiegeparabeln oder noch weitergehende Näherungen gefragt:

9

Treibt man das ins Unendliche weiter, entsteht eine Potenzreihe, zum Beispiel die für den Sinus in Bogenmaß:

10

Viele wichtige Funktionen lassen sich praktisch nur über Potenzreihen bestimmen, darunter sin und exp. Potenzreihen helfen auch, Differentialgleichungen zu lösen, gegebenenfalls näherungsweise. Beispiel: Gesucht ist eine Funktion f, die die Differentialgleichung $f' = f$ erfüllt und den Anfangswert

$f(0) = 1$ hat:

11

4 Fourier- und Laplace-Transformation

Fourier-Reihe und Fourier-Transformation sind Methoden, um Funktionen in sinusförmige Teilwellen zu zerlegen. Sinusförmige Schwingungen sind *die* natürlichen Schwingungen, was das Rechnen vereinfacht.

Die Fourier-Reihe ist für periodische Signale zuständig. Mit ihr kann man zum Beispiel Störungen der Wellenform der Netzspannung untersuchen:

12

oder den Tagesgang von Klimadaten modellieren:

13

Die Fourier-Transformation verarbeitet nichtperiodische Signale. Die Wirkung von (linearen) Filtern wird meist für Sinuswellen gemessen. Per Fourier-Transformation kann man dann sagen, was mit allgemeinen Schwingungen passiert:

14

Die Formel der Laplace-Transformation sieht sehr ähnlich aus wie die Fourier-Transformation. Die Laplace-Transformation wird aber typischerweise ganz anders eingesetzt: als Hack zum Lösen von Differentialgleichungen, vor allem in der Regelungstechnik. Die Laplace-Transformation macht zum Beispiel aus der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 7x(t) = \sin(42t)$ für $t \geq 0$ folgende herkömmliche (das heißt algebraische) Gleichung:

15

Daraus bestimmt man $X(s)$ wie in der Schule. Das Ergebnis transformiert man dann wieder zurück, so dass man eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung hat.

5 Funktionen mehrerer Unabhängiger

Die meisten praktisch relevanten Größen hängen nicht von einer einzigen Variablen ab, sondern gleich von mehreren. Deshalb untersucht man Funktionen *mehrerer* Variabler. Beispiele:

16

Wir sehen uns an, was Ableitung und Integral für solche Funktionen bedeuten:

17

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale sind dabei Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Ein einfaches Beispiel ist die Berechnung der Fläche einer Kreisscheibe mit dem Radius R:

18

(Diese spezielle Fläche lässt sich allerdings noch geschickter bestimmen – wie vergangenes Semester vorgeführt.)

Ableitungen in mehreren Dimensionen sind nötig, um zu bestimmen, wie sich Schwankungen der Eingangsgrößen in komplizierteren Formeln wie $a^2 \sin(b)$ auf das Ergebnis auswirken. Außerdem kann man in mehreren Dimensionen mit Hilfe von Ableitungen nach Extremwerten suchen, um den optimalen Arbeitspunkt für eine Maschine oder eine Schaltung zu finden.