Mehrdimensionale Integrale

Jörn Loviscach

Versionsstand: 22. Juni 2010, 19:45
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

1 Idee

Das bestimmte Integral einer Funktion einer Veränderlichen gibt die Fläche unter dem Funktionsgraphen an, samt Vorzeichen:

1

Entsprechend gibt das Integral einer Funktion *zweier* Veränderlicher das *Volumen* unter dem Funktionsgraphen an, samt Vorzeichen. Der Integrationsbereich ist nun eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

2

Ob man hier ein einfaches oder aber ein doppeltes Integralsymbol schreibt, ist Ansichtssache. Eine weitere Anmerkung: Unbestimmte Integrale = Stammfunktionen betrachtet man praktisch nur bei Funktionen einer Veränderlichen. Deshalb redet man hier nicht ausdrücklich von einem *bestimmten* Integral.

Integrale von Funktionen dreier Veränderlicher haben eine entsprechende Bedeutung. Das vierdimensionale (Hyper-)Volumen unter einem dreidimensionalen Volumen im $\mathbb{R}^3$ ist allerdings nicht leicht darzustellen. Was man in der Anwendung häufig findet, ist das Integral über drei Variablen im Sinne einer Summe oder eines Mittelwerts. Zum Beispiel könnte von einem Stoff eine ortsabhängige Dichte $\rho(\mathbf{x})$ in kg/m^3 gegeben sein. Dann ist die Gesamtmasse gleich:

3

2 Berechnung kartesischer Mehrfachintegrale

Angenommen, die Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2$ soll über das Dreieck zwischen den Punkten (0|0), (1|0) und (0|1) integriert werden. Gesucht ist also sozusagen das Volumen eines dreieckigen Tortenstücks unter dem Paraboloid:

4

Der übliche Trick besteht nun darin, den Integrationsbereich (d. h. das Dreieck) längs der x- oder der y-Achse in Salamischeiben zu schneiden, zum Beispiel so:

5

und dann das Mehrfachintegral in ein eindimensionales Integral eines eindimensionalen Integrals umzuwandeln, bei dem ggf. die Grenzen des inneren Integrals von der Variablen des äußeren Integrals abhängen (Nicht anders herum!):

6

Entsprechend bei Funktionen von drei und mehr Veränderlichen.

3 Integration in Polarkoordinaten und Zylinderkoordinaten

Eine Funktion $f(r,\phi)$ und ein Integrationsbereich seien in Polarkoordinaten gegeben. Dann möchte man gerne über r und ϕ integrieren statt über x und y. Wenn man sich die Integration als Grenzfall einer Summe vorstellt, summiert man in kartesischen Koordinaten hohe oder tiefe Quader mit kleiner quadratischer Grundfläche $dx\,dy$ und Höhe $f(x,y)$. Bei Polarkoordinaten sind die Grundflächen dagegen nicht mehr quadratisch, sondern kleine Sektoren von Kreisringen. Die Fläche eines solchen Stücks ist nicht $dr\,d\phi$, sondern verlangt einen Korrekturfaktor:

7

So kann man zum Beispiel die Fläche der Kreisscheibe mit Radius R um den Ursprung bestimmen:

8

In Zylinderkoordinaten ist derselbe Korrekturfaktor nötig.

4 Integration in Kugelkoordinaten

Die Integration einer Funktion $f(\mathbf{x})$ über kartesische Koordinaten $\mathbf{x}$ kann man sich als Grenzwert einer Summe von Funktionswert mal Würfelvolumen vorstellen:

9

Bei Integration über Kugelkoordinaten hat man es nicht mehr mit Würfeln zu tun, sondern mit recht komplizierten runden Stückchen. Die nähern sich aber immer mehr der Würfelform an, je kleiner sie werden. Das Volumen eines solchen Stücks ist nicht $dr\, d\theta\, d\phi$, sondern verlangt einen Korrekturfaktor:

10

So kann man zum Beispiel das Volumen des Kugel mit Radius R um den Ursprung bestimmen:

11

5 Kurvenintegral

Ein Massepunkt wird durch ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ bewegt. Welche Arbeit ist dabei zu leisten oder wird dabei frei? Um das zu berechnen, ist entlang der Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ des Körpers „Kraft in Wegrichtung mal Weg“ aufzusummieren:

12

Das rechnet man aus, indem man den konkreten Zeitverlauf der Bahn einsetzt:

13

Dies ist wieder ein bestimmtes Integral wie man es kennt.

Wenn das Kraftfeld nicht von der Zeit abhängt, ist es egal, welchen konkreten Zeitverlauf man zum Ausrechnen nimmt, Hauptsache, alle Punkte werden mindestens einmal angefahren. Für Kurvenintegrale über geschlossene Bahnen (d. h. Anfangspunkt = Endpunkt) schreibt man auch einen Kringel durch das Integralzeichen: $\oint$. Diese Integrale treten insbesondere bei der Berechnung von Induktionsspannungen auf. Der Pfad beschreibt dann keine Bewegung, sondern die Form des Leiters.