

Fourier-Reihe mit komplexer Exponentialfunktion

Jörn Loviscach

Versionsstand: 9. Juni 2010, 15:54

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

1 Überlagerung sinusförmiger Schwingungen

Das Verhalten vieler Systeme ist für sinusförmige Störungen/Anregungen relativ leicht zu beschreiben. Außerdem sind praktisch alle hinreichend schwachen Schwingungen sinusförmig, weil die entsprechenden Differentialgleichungen dann mehr und mehr linear werden und damit der des Federpendels entsprechen.

Netterweise können alle Schwingungen aus sinusförmigen Schwingungen zusammengesetzt werden. Das ist der praktische Hintergrund der Fourier-Reihe [Fourier series] und der kontinuierlichen Fourier-Transformation [Fourier transform] (Link: Aussprache). Man kann zum Zusammensetzen auch andere Schwingungen als sinusförmige nehmen, zum Beispiel Wavelets. Aber die Fourier-Theorie beschäftigt sich nur mit den sinusförmigen; das ist in der Praxis der wichtigste Fall.

Das Spektrum eines Signals gibt an, aus welchen sinusförmigen Teilsignalen sich das Signal zusammensetzt. Typischerweise gibt man deren Frequenzen und deren Amplitude an, nicht deren Phase. Der Weg vom Signal zu den Amplituden und Phasen seiner sinusförmigen Teilsignale heißt Fourier-Analyse; der umgekehrte Weg von den Amplituden und Phasen der sinusförmigen Teile zum Gesamtsignal heißt Fourier-Synthese.

Bei der *Fourier-Reihe* geht es um periodische Schwingungen. Es zeigt sich, dass diese aus sinusförmigen Schwingungen der gleichen Frequenz (Grundfrequenz [fundamental]) und der ganzzahligen Vielfachen (Oberwellen) dieser Frequenz bilden lassen, gegebenenfalls plus einen konstanten Versatz (Gleichspannung [DC component]). Alle diese Teilschwingungen inklusive der Grundschwingung heißen Harmonische oder Teiltöne [partials]. Die n -te Harmonische hat die n -fache Grundfrequenz, $n = 0, 1, 2, \dots$

Demos mit Wolfram Alpha:

- Sägezahnwelle [sawtooth] mit Periode 2π :
`FourierSeries[t, t, 7]`
- Rechteckwelle [rectangle] mit Periode 2π :
`FourierSeries[sgn(t), t, 7]`

- Dreieckswelle [triangle] mit Periode 2π :

FourierSeries[|t|, t, 7]

Demos mit Audacity: Spektrogramm, Spektrum-Analyzer.

2 Funktionen mit der Periode 1

Zunächst soll es um Funktionen f , gehen, welche die Periode 1 haben, das heißt $f(t+1) = f(t)$ für alle t , also zum Beispiel eine solche:

1

Auch komplexwertige Funktionen sind dabei erlaubt. Nebenbei: Eine Funktion mit der Periode $1/42$ hat automatisch auch die Periode 1.

Als Ausgangspunkt, um eine solche Funktion f aus sinusförmigen Schwingungen zusammensetzen, nimmt man folgende Basisfunktionen:

2

für alle ganzen Zahlen $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Diese Funktionen haben ebenfalls (unter anderem) die Periode 1.

Die komplexwertigen Funktionen mit Periode 1 bilden einen Vektorraum: Man kann sie mit (reellen oder komplexen) Zahlen multiplizieren und zueinander addieren, wobei wieder Funktionen mit Periode 1 entstehen und die üblichen Rechenregeln gelten.

In diesem Vektorraum kann man auch ein (abstraktes) Skalarprodukt zweier Funktionen f und g definieren, nämlich:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

Das Skalarprodukt einer Funktion mit sich selbst soll wie in der Geometrie das Quadrat ihrer (abstrakten) Länge sein:

$$\|f\|^2 := \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

Diese Länge (korrekt genannt: „ L^2 -Norm“) entspricht dem Effektivwert [RMS, root mean square] in der Elektrotechnik.

Die Funktionen $t \mapsto \exp(2\pi jnt)$ für $n \in \mathbb{Z}$ haben alle die Norm 1:

5

Außerdem stehen sie aufeinander senkrecht – in dem Sinne, dass das Skalarprodukt jeder dieser Funktionen mit einer anderen dieser Funktionen null ist:

6

3 Fourier-Reihe mit komplexer Exponentialfunktion

Angenommen, eine Funktion f ist „irgendwie“ aus Vielfachen c_n der Funktionen $t \mapsto \exp(2\pi jnt)$ zusammengesetzt. Also:

7

Das ist die Fourier-Reihe. Die Zahlen c_n heißen komplexe Fourier-Koeffizienten. Zum Beispiel c_{42} und c_{-42} sagen zusammen etwas über den Anteil der Frequenz 42 und über die Phase der entsprechenden sinusförmigen Schwingung. Einen Cosinus mit Frequenz 42 und Amplitude 1 erhält man mit:

8

Einen Sinus mit Frequenz 42 und Amplitude 5 erhält man mit:

9

Netterweise kann man jedes c_n nun ganz billig ausrechnen, so wie man in der Geometrie einen Vektor in eine Basis senkrechter Einheitsvektoren zerlegt. Bilden wir versuchsweise das Skalarprodukt von $t \mapsto \exp(2\pi jmt)$ mit f :

10

Also gilt:

11

Streng genommen, müsste man sich hier darüber Gedanken machen, dass man auch bei unendliche lange Summen (also Reihen) so ausklammern kann.

4 Vollständigkeit

Eine Frage ist noch offen: *Kann* man jede Funktion f , welche die Periode 1 hat, aus den Funktionen $t \mapsto \exp(2\pi jnt)$ zusammensetzen? In der Tat geht das, wenn f bis auf endlich viele Sprung- oder Knickstellen stetig differenzierbar ist. An Sprungstellen von f konvergiert die Fourier-Reihe allerdings gegen den Mittelwert aus linkem und rechtem Grenzwert von f , was nicht unbedingt der Funktionswert von f sein muss:

12

Das mathematisch zu beweisen, ist allerdings recht kompliziert.

Dass sich jede Funktion bilden lässt (mit gewissen Einschränkungen), heißt mathematisch, dass Menge der Funktionen $t \mapsto \exp(2\pi jnt)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ „vollständig“ [complete] ist. Das ist analog dazu, dass man im \mathbb{R}^3 drei Basisvektoren braucht,

um alle anderen Vektoren bilden zu können, und nur mit zwei Basisvektoren nicht hinkommt.

5 Funktionen mit beliebiger Periode T

Um statt der Funktionen mit Periode 1 solche mit einer anderen Periode T zu behandeln, ändert man das Skalarprodukt:

¹³

und entsprechend die Länge (Norm):

¹⁴

Als Basis nimmt man die Funktionen:

¹⁵

Denn nun haben diese die Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander.

Also ergibt sich für Funktionen f mit Periode T die Fourier-Reihe:

¹⁶

mit den Fourier-Koeffizienten:

¹⁷

Nebenbei: Wenn man eine periodische Funktion über die Länge einer Periode integriert, ist es egal, an welcher Stelle man anfängt!