# Konvergenzradius

Jörn Loviscach

Versionsstand: 9. Juni 2010, 15:45
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

## 1 Potenzreihen

Die Entwicklung einer Funktion $f$ an einer Stelle $x_0$ in eine Taylor-Reihe war:

1

Es stellen sich zwei Fragen:

1. Ergibt diese unendliche lange Summe (Fachbegriff: „Reihe") Sinn? (Dies führt auf den Begriff „Konvergenzradius".)
2. Falls die Reihe Sinn ergibt: Kommt aus ihr wieder die Funktion $f$ heraus? (Dies führt auf den Begriff der „analytischen Funktionen".)

Zur ersten Frage: Die Taylor-Reihe ist eine spezielle Art, eine Potenzreihe zu bilden. Um die erste Frage zu beantworten, kann man einfacher eine allgemeine Potenzreihe untersuchen:

2

Dabei sind die $a_0, a_1, \ldots$ feste Zahlen.

Was soll diese unendlich lange Summe mathematisch bedeuten?

3

Wenn dieser Grenzwert für ein gegebenes $x$ existiert, sagt man: Die Reihe konvergiert für dieses $x$. Die große Frage ist, für welche $x$ das der Fall ist.

Anschaulich ist klar, dass die Potenzreihe um so mehr zur Explosion neigt, je weiter $x$ von $x_0$ weg liegt, also je größer $|x-x_0|$ wird. Und in der Tat findet man genau das: Zu jeder Potenzreihe gibt es einen sogenannten Konvergenzradius $r$, so dass die Reihe für $|x-x_0| < r$ konvergiert und für $|x-x_0| > r$ divergiert (also keinen Grenzwert hat). Genau auf dem Rand, also für $|x-x_0| = r$, kann sie konvergieren oder divergieren, je nach $x$. Im Prinzip sieht das so aus:

4

Im Fall $r = \infty$ hat man immer Konvergenz, so wie bei den Funktionen exp, sin und cos. Im Fall $r = 0$ kann man nur $x = x_0$ einsetzen, was nicht sehr spannend ist.

Der Begriff Konvergenz*radius* lässt an eine Kreisscheibe denken – und genau darum geht es: Setzt man Zahlen $x \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihe ein, ist das Verhalten so:

5

Dass die kritische Grenze genau ein Kreis ist, ist zunächst überraschend.

# 2 Konvergenz von Potenzreihen

Angenommen, $x$ liegt so dicht bei $x_0$, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \leq 0{,}999$ für alle $n$ gilt. Dann kann man den Betrag des $n$-ten Summanden der Potenzreihe nach oben abschätzen:

6

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell schrumpfenden Abständen:

7

Die Reihe wird in diesem Fall also konvergieren. Dasselbe passiert auch mit 0,99999 usw. statt 0,999.

Angenommen dagegen, $x$ liegt so fern von $x_0$, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \geq 1{,}001$ für alle $n$ gilt. Dann kann man den Betrag des $n$-ten Summanden der Potenzreihe *nach unten* abschätzen:

8

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell *wachsenden* Abständen:

9

Die Reihe wird in diesem Fall also divergieren. Dasselbe passiert auch mit 1,00001 usw. statt 1,001.

# 3 Konvergenzradius

Es kommt also nur auf den Betrag $|x-x_0|$ an. Die Grenzlinie zwischen Konvergenz und Divergenz muss deshalb wirklich ein Kreis sein, keine Quadrat oder eine andere Figur. Der Radius dieses Kreises heißt Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe.

Im Allgemeinen ist $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$ nicht *durchgängig* größer oder kleiner als 1, was die Sache kompliziert macht. Wesentlich ist, ob $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$ „meist“ kleiner oder aber größer ist als eins. Endlich viele Ausreißer schaden nicht.

Als Trick definiert man den „Limes superior" $\limsup_{n\to\infty}$, das ist der höchste Häufungspunkt einer Folge – wobei $+\infty$ und $-\infty$ erlaubt sind. Beispiele:

| Folge | lim sup |
|---|---|
| 1;2;3;1;2;3;1;2;3;... | 10 |
| 1;10;2;20;3;30;... | 11 |
| 0,9;0,99;0,999;0,9999;... | 12 |

Dann lässt sich für den Konvergenzradius schreiben:

13

,

wobei ausnahmsweise $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$ gerechnet wird. Folgende drei Fälle kann man dann unterscheiden:

14

# 4 Analytische Funktionen

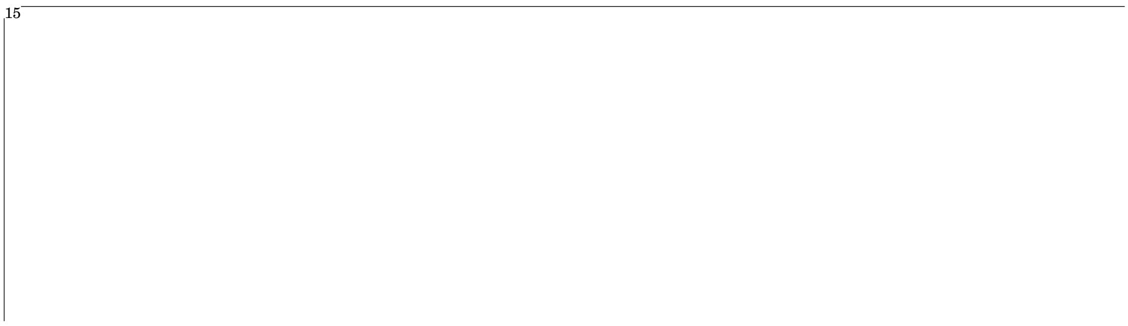
Nun zum zweiten Problem: Angenommen, eine Taylor-Reihe konvergiert für ein gegebenes $x$. Ist das Ergebnis dann wieder $f(x)$?

Funktionen $f$, die das erfüllen, heißen analytisch. Jede analytische Funktion muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein. Das gilt aber nicht umgekehrt: Eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, muss nicht unbedingt analytisch sein. Will sagen: Nicht jede konvergente Taylor-Reihe summiert sich wieder zu der zu Grunde liegenden Funktion $f$.

Die Ausnahmen sind allerdings exotisch. Hier ist ein Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ wenn } x \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion schmiegt sich bei $x = 0$ extrem stark an die $x$-Achse: Der Funktionswert und alle Ableitungen sind dort 0. Das sieht etwa so aus:




Die Taylor-Reihe dieser Funktion $f$ für $x_0 = 0$ ist deshalb für alle $x$ gleich null – also nicht gleich $f$. So etwas passiert aber im wahren Leben selten.