Restabschätzung nach Taylor

Jörn Loviscach

Versionsstand: 9. Juni 2010, 15:44

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

1 Fragestellung

Eine Funktion f soll an der Stelle x_0 mit einem Taylor-Polynom n-ten Grades genähert werden, also durch den Anfang der Taylor-Reihe:

1

Die Frage ist, wie gut diese Näherung an einer Stelle x ist. Anschaulich scheint es so, dass die Näherung um so besser ist, je näher x an x_0 ist und je höher der Grad n ist. Um das zu untersuchen, betrachtet man die Abweichung der Funktion f von der Näherung. Das ist der Fehler, Rest R_n genannt:

2

2 Taylor-Restformel

R_1, also der Fehler der Tangentengerade, ergibt sich als:

3

Das zeigt man mit Hilfe einer partiellen Integration:

4

R_2, also der Fehler der Schmiegeparabel, ergibt sich als:

5

Das zeigt man, indem diesen Ausdruck mit Hilfe einer partiellen Integration auf R_1 zurückführt:

6

Nach diesem Muster ergibt sich offensichtlich allgemein für R_n, also den Fehler des Taylor-Polynoms n-ter Ordnung:

7

Die ist die Taylor-Restformel.

3 Abschätzung des Fehlers

Die Formel für R_n erlaubt zu sagen, wie dicht x an x_0 liegen muss und wie hoch der Grad n gewählt werden muss, um den Fehler R_n hinreichend klein zu halten. Typischerweise gibt man dazu vor, wie groß der Absolutbetrag des Fehlers maximal sein darf (sagen wir eine Zahl F). Also ist die Frage, für welche x und für welche n dies gilt:

8

Das unschöne Integral auszurechnen, ist mit Bleistift und Papier oft gar nicht möglich. Man gibt sich mit einer „konservativen" Schätzung zufrieden, d. h. einer Schätzung, die auf der sicheren Seite liegt, den Fehler im Betrag also allenfalls zu groß schätzt und nie zu klein.

Das Integral ändert man dazu so, dass es im Betrag allenfalls größer werden kann. Betrachten wir zunächst den Fall $x > x_0$:

9

Nun kann man das Integral ganz wegfallen lassen:

10

Den Fall $x < x_0$ kann man so mit erfassen:

11

Wenn man x und n so wählt, dass dieser Ausdruck kleiner als die gewünschte Fehlerschranke F ist, dann ist es der Betrag $|R_n|$ des wahren Fehlers erst recht.

4 Ein Beispiel

Die Wurzelfunktion $f = \sqrt{\ }$ soll an $x_0 = 4$ mit einer quadratischen Parabel genähert werden. Die Näherungsparabel (quadratisches Taylor-Polynom) ist:

12

Wie weit weicht die Parabel auf dem Bereich von $x = 1$ bis $x = 7$ schlimmstenfalls von der Wurzel ab (konservativ geschätzt)?

13