

# Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen. Eulersche Identität. Polardarstellung. Additionstheoreme. Vollständige Faktorisierung von Polynomen.

Jörn Loviscach

Versionsstand: 2. April 2010, 20:20

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

## 1 Ganzzahlige Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen werden die Längen multipliziert und die Winkel addiert. Damit kann man sofort sagen, was bei der zweiten, dritten, vierten usw. Potenz passiert:

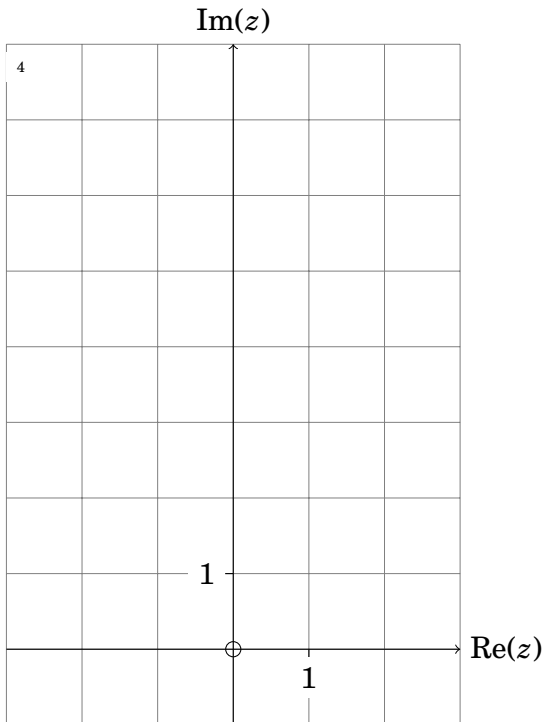
1

Wegen  $z^{-n} = 1/z^n$  für  $z \neq 0$  passiert bei negativen Exponenten das Umgekehrte:

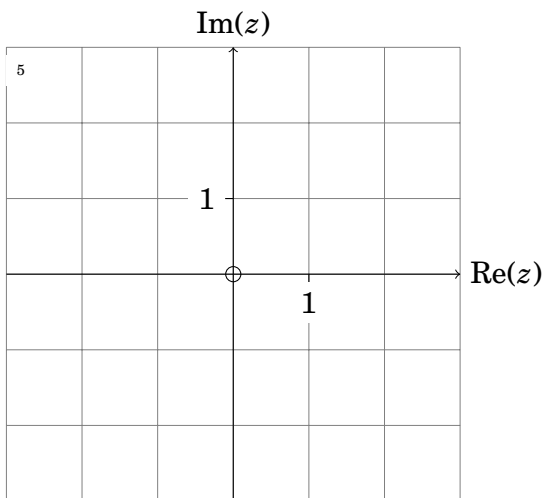
2

Entsprechend kann man sich überlegen, wie Wurzeln komplexer Zahlen funktionieren müssen. Gesucht ist beispielsweise eine (bewusst steht hier „eine“,

nicht „die“) dritte Wurzel von  $8j$ , also eine Zahl  $z \in \mathbb{C}$  mit  
 Dafür gibt es eine offensichtliche Möglichkeit:



Und zwei weitere, nicht so offensichtliche Möglichkeiten:



Analog hat man für eine 42-ste Wurzel einer komplexen Zahl  $\neq 0$  satte 42 Möglichkeiten zur Auswahl. Eine besondere davon ist schöner als die anderen, weil sie dichter an der positiven reellen Achse liegt (oder sogar *darauf*) liegt. Diese sozusagen schönste Wurzel heißt der „Hauptwert“ [principal value]. Aber rechnerisch ist sie nicht besser als die anderen. Viele, aber nicht alle Autoren nehmen als Hauptwert diejenige Wurzel, die *gegen den Uhrzeigersinn* am dichtesten an der positiven reellen Achse liegt.

Demo mit Wolfram Alpha:  $z^{12} = 13+42i$ . Achtung: Schon für cube root  $-8$  liefert Wolfram Alpha den – hier überraschenden – komplexen Hauptwert statt des schulmäßigen  $-2$ .

**Achtung:** Weil die Wurzeln im Komplexen nicht eindeutig sind, muss man beim Umformen von Gleichungen extrem vorsichtig sein. Am besten verwenden Sie im Komplexen *nie* das Wurzelsymbol oder gebrochenzahlige Exponenten, sondern drücken alles mit ganzzahligen Potenzen aus. Also lieber  $z^{13} = \text{bla}$  schreiben statt  $z = \sqrt[13]{\text{bla}}$ , denn die letztere Gleichung sieht so aus, als ob es nur ein einziges  $z$  gäbe.

Der Ärger fängt schon mit der imaginären Einheit  $i$  selbst an: Man darf im Prinzip  $j = \sqrt{-1}$  mit der Wurzel schreiben. Aber dann ist Vorsicht beim Umformen angesagt:

6

---

## 2 Eulersche Identität

Dass bei der Multiplikation komplexer Zahlen die Winkel addiert werden, erinnert sehr an den Logarithmus:

7

---

Das kommt nicht von ungefähr und führt auf eine überraschende und äußerst nützliche Eigenschaft komplexer Zahlen: die Eulersche Identität.

Betrachten wir eine komplexe Zahl  $z$  der Länge 1 und dem Winkel  $\phi$  im Bogenmaß. Die muss entstehen, wenn man eine komplexe Zahl  $z_n$  der Länge 1 mit dem Winkel  $\phi/n$  im Bogenmaß hoch  $n$  nimmt:

8

---

Die komplexe Zahl  $z_n$  der Länge 1 und dem Winkel  $\phi/n$  im Bogenmaß lässt sich aber in guter Näherung angeben:

9

---

Also lässt sich die komplexe Zahl  $z$  der Länge 1 und dem Winkel  $\phi$  im Bogenmaß so schreiben:

10

---

Das ist die schon bekannte Produktformel für die Exponentialfunktion, aber nun mit einem komplexen Exponenten. Man definiert sinnvollerweise die Exponentialfunktion für imaginäre Zahlen so:

11

Man überlegt sich also nicht direkt, was  $e$  eine imaginäre Anzahl von Malen mit sich selbst sein multipliziert soll. Vielmehr findet man überraschenderweise hier die Formel wieder, mit der man  $e^x$  für reelle Zahlen  $x$  bestimmt hat.

Aus der Skizze sieht man sofort, dass man nun auch Sinus und Cosinus des Winkels hat. Dies ist die Eulersche Identität:

12

Statt mit Sinus und Cosinus zu rechnen, darf man also mit der Exponentialfunktion rechnen. Das ist wesentlich eleganter und wird deshalb fast überall gemacht, wo Schwingungen zu untersuchen sind.

Mit Hilfe der Potenzrechengesetze – die gelten netterweise weiter – ist nun auch klar, was die Eulersche Zahl  $e$  hoch eine beliebige komplexe Zahl ist:

<sup>13</sup>

### 3 Potenzreihen und Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Wie für reelle Zahlen vorgeführt, lässt sich der Grenzwert des Produkts in eine unendliche Summe (Potenzreihe) umwandeln. Also gibt ebenfalls:

<sup>14</sup>

Vergleicht man dies mit der Eulerschen Identität, erhält man Formeln für Sinus und Cosinus (im Bogenmaß!):

<sup>15</sup>

Wie elegant die Eulersche Identität ist, sieht man schon bei den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus. Setzen wir die Summe  $\alpha + \beta$  zweier beliebiger Winkel ein:

16

---

Dann kann man ablesen:

17

Es lohnt sich aber gar nicht mehr, diese Additionstheoreme auswendig zu lernen:  
In die Exponentialfunktion sind sie als Potenzrechengesetz eingebaut.

## 4 Polardarstellung komplexer Zahlen

Wenn also <sup>18</sup>  $e^{i\phi}$  eine komplexe Zahl mit Länge 1 und Winkel  $\phi$  ist,  
lässt sich jede komplexe Zahl  $z$  so schreiben:

19

Dies heißt „Polardarstellung“. Für  $z = 0$  ist der Winkel beliebig; ansonsten ist er  
bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  bestimmt.

In der Polardarstellung sind Multiplikation und Division keine Überraschung  
angesichts der Potenzrechengesetze:

20

Die  $n$ -te Potenz ( $n \in \mathbb{Z}$ ) fällt ebenfalls leicht:

<sup>21</sup>

Wie die  $n$ -ten Wurzeln:

<sup>22</sup>

## 5 Vollständige Faktorisierung von Polynomen

Wo die  $pq$ -Formel bisher bei quadratischen Gleichungen versagt, weil etwas Negatives unter der Wurzel steht, kann man mit komplexen Zahlen weiterrechnen:

$$z^2 + 6z + 13 = 0 \iff$$

<sup>23</sup>

Weil das  $\pm$  vor der Wurzel die Mehrdeutigkeit anzeigt, ist es in diesem Fall ungefährlich, ein Wurzelsymbol zu schreiben.

Im Regelfall hat eine quadratische Gleichung also nun zwei Lösungen. In Ausnahmefällen sind diese beiden Lösungen gleich (und zwar, wenn 0 unter der Wurzel in der  $pq$ -Formel steht). Das geht entsprechend mit Gleichungen höheren Grades:

$$z^4 + z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = 0$$

hat vier verschiedene komplexe Zahlen  $z$  als Lösung, es sei denn, davon stimmen zufällig welche überein. Das Verhalten ist also viel einfacher als mit reellen Zahlen. (Wie ist es da?)

In komplexen Zahlen hat jedes Polynom mindestens eine Nullstelle. Man kann also immer weiter Linearfaktoren abspalten, so dass sich jedes Polynom in kom-

plexen Zahlen komplett in Linearfaktoren zerlegen lässt (Fundamentalsatz der Algebra).

Der strenge Beweis dafür ist haarig, aber man kann sich relativ leicht klar machen, dass jedes Polynom  $n$ -ten Grades  $n$  komplexe Nullstellen haben muss (die gegebenenfalls untereinander gleich sind).

Beispiel: wieder das Polynom  $z^4 + z^3 - 4z^2 + 5z - 2$ . Wir setzen für  $z$  alle komplexe Zahlen der Form  $z = r e^{j\phi}$  für alle Winkel  $\phi$  von 0 bis  $2\pi$ , aber mit fester Länge  $r$  ein – also eine komplette Kreislinie mit Radius  $r$ . Wenn  $r$  dicht bei null

ist, gewinnt der Term <sup>24</sup> und es passiert Folgendes:

<sup>25</sup>

Wenn  $r$  sehr groß ist, gewinnt der Term <sup>26</sup> und es passiert Folgendes:

<sup>27</sup>

Wenn man also  $r$  kontinuierlich von 0 bis unendlich wachsen lässt (Demo am Rechner), müssen sich irgendwann vier Schleifen bilden und nach außen durch den Ursprung wandern – nacheinander oder seltener auch gleichzeitig. Sobald eine Schleife den Ursprung berührt, haben wir eine Nullstelle gefunden, nämlich die jeweilige Zahl  $z = r e^{j\phi}$ . Das *muss* passieren, also gibt es immer eine Nullstelle – zumindest in den komplexen Zahlen.