Fehler in Messungen

N Messungen $x_1, x_2, \ldots, x_N$

„wahrer Wert" + systematischer Fehler
+ zufälliger Fehler

untrennbar

μ

Soll im Mittel für $N \to \infty$

verschwinden.

Mittelwert der Gesamtheit

typische
Schätzung aus der Stichprobe:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

arithmetisches Mittel

Das ist nicht immer die
<u>beste</u> Schätzung:

42, 42, 42, 1000, 42, 42

---

geometrisches Mittel

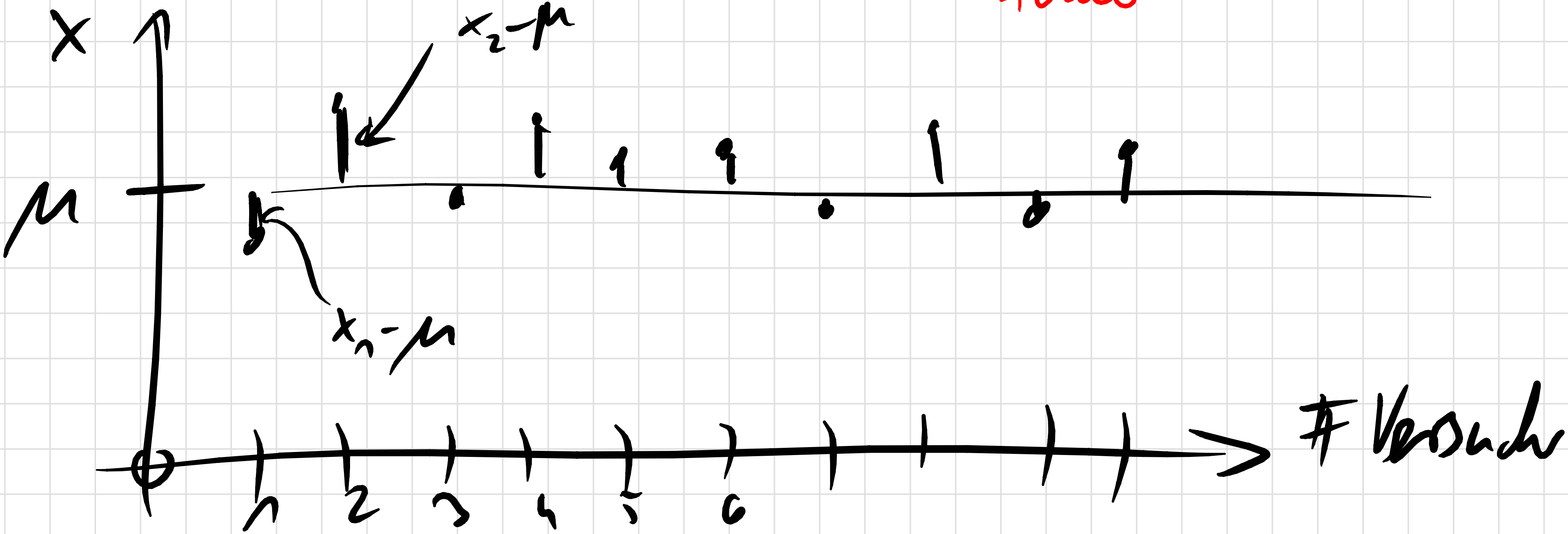
$$\sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

Standardabweichung σ

Mittelwert μ

der Gesamtheit

„typischer Fehler"



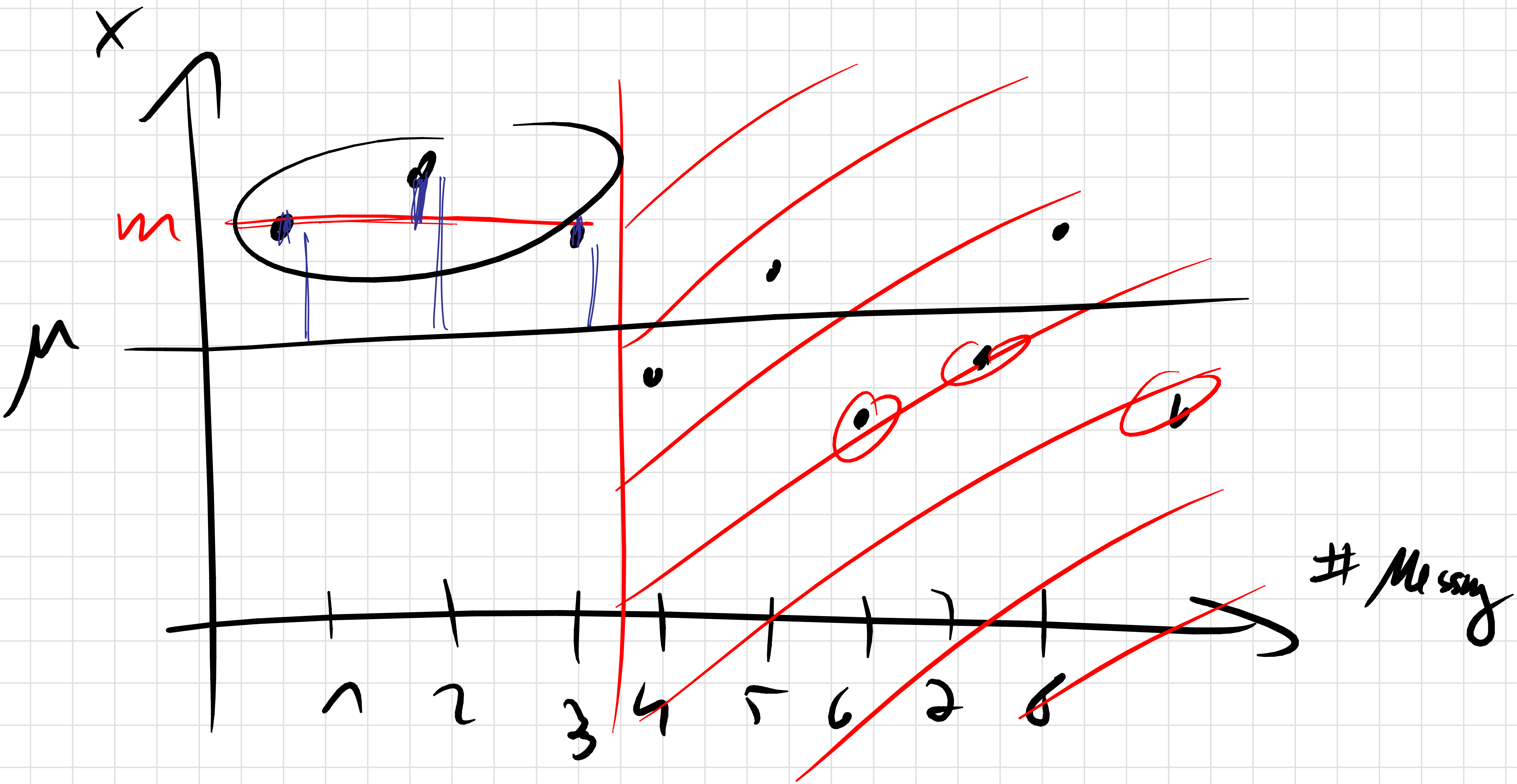
1. Idee: $\cancel{\dfrac{(x_1-\mu)+(x_2-\mu)+\dots+(x_N-\mu)}{N}} \approx 0$

2. Idee: $\dfrac{|x_1-\mu|+|x_2-\mu|+\dots+|x_N-\mu|}{N}$ unüblich

3. Idee: $\dfrac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\dots+(x_N-\mu)^2}{N}$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \text{„Varianz"} = \sigma^2$$

Std.-Abw. $\sigma = \sqrt{\text{Varianz}}$


x
m
μ
1
2
3
4
5
6
7
8
Missing

Schätzung der Standardabweichung σ

$\hookrightarrow$ Standardabweichung der Stichprobe s

Versuch: $\dfrac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots+(x_N-\mu)^2}{N}$

$\approx \dfrac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\ldots+(x_N-m)^2}{N}$

Das muss zu klein sein! Um wieviel?

Lösung: $s^2 = \underbrace{\frac{N}{N-1}}_{\text{Korrekturfaktor}}$ ~~wie oben~~

$$= \frac{\cancel{N}}{N-1} \cdot \frac{(x_1-m)^2 + \ldots + (x_N-m)^2}{\cancel{N}}$$

$$= \frac{(x_1-m)^2 + \ldots + (x_N-m)^2}{N-1}$$

$s = \sqrt{\%}$

Warum $\frac{N}{N-1}$?

$$?\cdot\frac{(x_1-m)^2+\ldots+(x_N-m)^2}{N}$$

Wollen:

$$\frac{?\cdot\frac{x_1 \ldots x_N}{N}+?\,\frac{x_{N+1}\ldots x_{2N}}{N}+\ldots ?\,\frac{x_{kN+1}\ldots}{N}}{k}$$

$$\overset{!}{\longrightarrow} \sigma^2$$

$$\frac{1}{kN}\left(\left(x_1 - \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1+\dots+x_N}{N}\right)^2 + \dots\right)$$

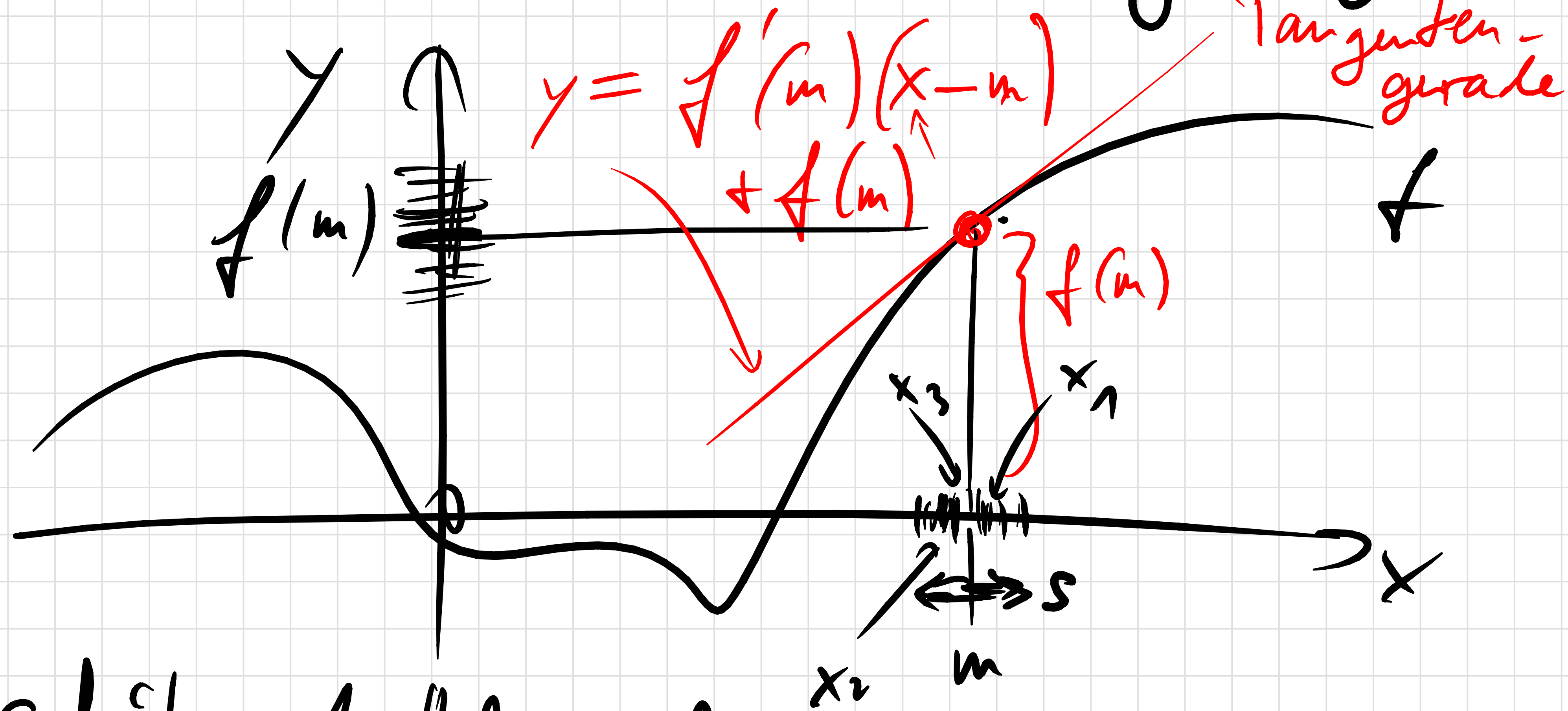
$$x_1^2 - \frac{2}{N} x_1 \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} + \frac{(x_1+x_2+\dots+x_N)^2}{N^2} + \dots$$

Funktionen von Messwerten:
Fehlerfortpflanzung

$x_1, \ldots, x_N$: Mittelwert m
Stdabw s

Was sind Mittelwert und Stdabw.
von $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N)$?

Man kann einfach schätzen, wenn lineare Näherung möglich:



Schätze Mittel von f : $f(m)$

Schätze Stdabw. von f : $|f'(m)| \cdot s$

Keine lineare Näherung im Modell