Mathematik II für Regenerative Energien

Klausur vom 1. Februar 2010

Jörn Loviscach

Versionsstand: 1. Februar 2010, 13:46

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunkzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: vier einseitig oder zwei doppelseitig beschriftete Blätter Formelsammlung beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Taschenrechner oder Computer; kein Skript; keine andere Formelsammlung.

Name	Vorname	Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

Fingerübungen

1. Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, die $z^2 + 2jz + 5 = 0$ erfüllen, wobei j die imaginäre Einheit ist.

2. Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei Kreise gegeben, beide mit dem Radius 4, einer mit dem Mittelpunkt (0|0) und einer mit dem Mittelpunkt (2|1). Die Kreislinien schneiden sich in zwei Punkten; bestimmen Sie die y-Koordinaten dieser Schnittpunkte.

3. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Nähern Sie den Wert von $\ln(3)$ durch die Tangentengerade an den natürlichen Logarithmus an der Stelle $x = 1$. Geben Sie eine Obergrenze für den Fehler an.

6. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' \stackrel{!}{=} y^2 \cos(x)$ mit $y(5) \stackrel{!}{=} 2$.

Bitte wenden!

Kreative Anwendung

7. Schreiben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Summe von Vielfachen dieser drei Vektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

8. Eine Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an einer zunächst unbekannten Achse bilde den Punkt $(3|1)$ auf den Punkt $(2|4)$ ab. Geben Sie eine Geradengleichung für die Spiegelungsachse an.

9. Die Abbildung
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
ist eine Drehung um den Ursprung. Bestimmen Sie den Drehungswinkel.

10. Finden Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' - y = 0$.

11. Wandeln Sie die Differentialgleichung $y' - (x^2+1)y'' + x = 0$ in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um. (Eine Lösung ist hier nicht gefragt.)

12. Bestimmen Sie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_3 für die Funktion f, welche die Periode 5 hat und für $0 \le t < 5$ durch $f(t) := t - \frac{5}{2}$ gegeben ist. Hinweis: partielle Integration.