Lokale Extrema. Wendepunkte

Jörn Loviscach

Versionsstand: 22. Dezember 2009, 18:08

1 Extrema: lokal und global

„Extremum“ ist ein Oberbegriff für Maximum und Minimum: den größten bzw. kleinsten Wert (z. B. aller Werte, die eine Funktion annimmt). Mehrzahl: Extrema usw. Die englischen Begriffe sind dieselben.

Um sicherzustellen, dass eine Maschine oder ein Regelungsverfahren mit allen Fällen zurecht kommt, muss man oft die maximal oder minimal möglichen Werte bestimmter Größen kennen. Ebenso sucht man maximale oder minimale Werte zum Beispiel, um Prozesse in der Dauer oder im Energieaufwand zu optimieren.

Bei Funktionen spricht man von zwei Sorten von Extrema: lokale = relative Extrema ($\geq$ bzw. $\leq$ alle Werte in einer nach links und rechts ausgedehnten Umgebung, nicht am Rand des Definitionsbereichs) und globale = absolute Extrema (insgesamt am größten bzw. am kleinsten):

1

Achtung: „Extremum“, „Maximum“, „Minimum“ bezeichnen genau genommen die Werte die Funktion (also Höhen auf der y-Achse, sozusagen), nicht die Stellen x oder die Punkte $(x|f(x))$. Eine Funktion kann deshalb höchstens ein globales Maximum haben und höchstens ein globales Minimum. Allerdings kann sie diese an mehreren Stellen annehmen:

2

Es kann auch passieren, dass es gar kein globales Maximum oder kein globales Minimum gibt:

3

Wenn ein es globales Maximum bzw. Minimum gibt, muss dies auch ein lokales Maximum bzw. Minimum sein oder aber ein Wert sein, der am einem Rand des Definitionsbereichs angenommen wird:

4

Also kann man das globale Maximum bzw. Minimum einer Funktion so finden (falls es existiert):

5

2 Kriterien für lokale Extrema

Ist die Funktion differenzierbar, muss an der Stelle eines lokalen Extremums gelten:

6

Diese Bedingung kann man oft leicht in Form einer Gleichung auswerten und hat damit schnell eine Liste an Kandidaten an Stellen für lokale Extrema.

Dies ist allerdings nur eine *notwendige* Bedingung, aber *keine hinreichende*, denn:

7

Stellen, an denen das schief geht, heißen Sattelstellen.

Um eine *hinreichende* und zugleich *notwendige* Bedingung für eine stetig differenzierbare Funktion anzugeben, kann man den Verlauf der ersten Ableitung betrachten:

8

Daraus lässt sich eine einfache *hinreichende*, aber *nicht notwendige* Bedingung stricken, wenn die Funktion zweimal differenzierbar ist:

9

3 Konvex/konkav

Eine konvexe Menge in der Geometrie ist eine Menge, welche die Verbindungsstrecken zwischen allen ihren Punkten enthält:

10

Bei einer konkaven Menge gilt das für das Komplement. Alle Verbindungsstrecken von Punkten außerhalb müssen also außerhalb liegen:

11

Vorsicht: Die meisten Mengen sind weder konvex noch konkav und heißen dann nicht-konvex.

Eine konvexe Funktion ist auf einem Intervall des $\mathbb{R}$ definiert und hat dort Funktionswerte, die immer auf oder unterhalb aller Sekanten liegen:

12

Kann man diese Funktion zweimal ableiten, ist sie genau dann konvex, wenn sie überall geradeaus oder nach links gekrümmt (Linkskurve) läuft. Mit der zweiten Ableitung ausgedrückt:

13

Entsprechend für konkav und nach rechts gekrümmt (Rechtskurve).

4 Wendepunkte

Ein Punkt des Graphen, an dem eine zweimal differenzierbare Funktion von Rechtskrümmung nach Linkskrümmung oder umgekehrt übergeht, heißt Wendepunkt [inflection point, *nicht wie in einer Erzählung* turning point]. Der zugehörige x-Wert ist dann die Wendestelle:

14

Mit der zweiten Ableitung hat man sofort eine *notwendige* Bedingung dafür, aber *keine hinreichende*:

15

Um eine *hinreichende* und zugleich *notwendige* Bedingung für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion anzugeben, kann man den Verlauf der zweiten Ableitung betrachten:

16

Daraus lässt sich eine einfache *hinreichende*, aber *nicht notwendige* Bedingung stricken, wenn die Funktion dreimal differenzierbar ist:

17